

## 4. Stochastik

### 4.4 Kombinatorik und Binomialverteilte Zufallsgrößen

H. Wuschke

01./02. Juni 2022

## Ziele der Sitzung

- Definition des Binomialkoeffizienten
- Begriffe der Kombinatorik exemplarisch anwenden
- Wahrscheinlichkeiten in der Binomialverteilung berechnen können
- Erwartungswert und Standardabweichung in der Binomialverteilung berechnen können
- Bedingungen für eine Binomialverteilung angeben
- Histogramme von Binomialverteilungen deuten können
- Sachsituationen interpretieren können

## Binomialkoeffizient

Der **Binomialkoeffizient** eine natürliche Zahl, definiert für  $n, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq k$ .

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad n! := n \cdot (n-1)! \text{ und } 0! := 1$$

## Pascal'sches Dreieck

Die Einträge sind Binomialkoeffizienten

$n = 0$									1										
$n = 1$									1					1					
$n = 2$									1			2		1					
$n = 3$									1		3		3		1				
$n = 4$									1		4		6		4		1		
$n = 5$									1		5		10		10		5		1

## Pascal'sches Dreieck mit Binomialkoeffizienten

$n = 0$												$\binom{0}{0}$								
$n = 1$												$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$						
$n = 2$												$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$				
$n = 3$												$\binom{3}{0}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{3}{2}$		$\binom{3}{3}$		
$n = 4$												$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	
$n = 5$												$\binom{5}{0}$		$\binom{5}{1}$		$\binom{5}{2}$		$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$

## Eigenschaften des Binomialkoeffizienten (Pascal'sches Dreieck)

Seien  $n, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq k$ . Dann gilt für den Binomialkoeffizienten:

❶  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

❷  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

❸  $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

❹  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

❺  $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$

## Binomischer Lehrsatz

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $k, n \in \mathbb{N}_0$ , dann gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

## Nutzen des Binomischen Lehrsatzes

Somit kann man verschiedene Potenzen bilden. Beispiele:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

## Permutation, Variation

Seien  $k, n \in \mathbb{N}$ .

Bei einer **Permutation ohne Wiederholung** wird die Anzahl der Möglichkeiten angegeben,  $n$  unterscheidbare Objekte in einer bestimmten Reihenfolge anzuordnen. Es gilt:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Bei einer **Variation ohne Wiederholung** wird die Anzahl der Möglichkeiten angegeben,  $k$  von  $n$  unterscheidbaren Objekten in einer bestimmten Reihenfolge anzuordnen. Es gilt:

$$\frac{n!}{(n - k)!} = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 2) \cdot (n - k + 1)$$

Bei einer **Variation mit Wiederholung** gibt es  $n^k$  Möglichkeiten der Anordnung.

## Kombination

Bei einer **Kombination ohne Wiederholung** wird die Anzahl der Möglichkeiten angegeben,  $k$  von  $n$  unterscheidbaren Objekten ohne eine bestimmte Reihenfolge anzuordnen. Es gilt:

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

## Begriff der Wiederholung

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung sagen wir statt „mit Wiederholung“ häufig „mit Zurücklegen“.

## Unterschied Variation und Kombination

Bei einer Variation ist die Position des Objektes wichtig, bei einer Kombination ist es egal, wann das Objekt erscheint.

Bildet man aus den Ziffern 1 bis 5 eine dreistellige Zahl, so gibt es bei der Variation 60 Möglichkeiten und bei der Kombination nur noch 10 Möglichkeiten.

## Beispiel 1

Es wird 10 Mal ein Laplace-Würfel geworfen. Dabei beschreibt die Zufallsgröße  $X$ : *Anzahl der 2*.

Berechnen Sie  $P(X = 0)$ .

$$P(X = 0) = P(\{\bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2}\}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,1615$$

$P(X = 10) = \left(\frac{1}{6}\right)^{10}$  lässt sich auch noch gut berechnen. Alle Zufallsgrößen dazwischen sind jedoch sehr aufwändig zu berechnen. Beispielsweise ist

$$P(X = 1) = P(\{2 \bar{2} \dots \bar{2}\}) + P(\{\bar{2} 2 \bar{2} \dots \bar{2}\}) + \dots + P(\{\bar{2} \dots \bar{2} 2\})$$

$$P(X = 1) = 10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 \approx 0,323$$



## Binomialverteilung

Lässt sich eine Zufallsgröße  $X$  durch ein Bernoulli-Experiment beschreiben, so vereinfacht sich die Berechnung der Zufallsgröße bei  $n$  Durchführungen für  $k$  Treffer mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  durch:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von diesen Zufallsexperimenten heißt **Binomialverteilung**  $B_{n,p}$ . Man spricht auch von einer **binomialverteilten Zufallsgröße**.

## Berechnung im Rechner

Mit dem Rechner kann man diese Zufallsgrößen leicht berechnen durch den Befehl  $\text{binompdf}(n,p,k)$ .

Beispiel:  $n = 20, p = \frac{2}{5}, k = 4$ , also  $B_{20; \frac{2}{5}}$  und  $P(X = 4)$

Im Rechner:  $\text{binompdf}(20, \frac{2}{5}, 4) \rightarrow P(X = 4) \approx 0,035$

## Bedingungen für eine Binomialverteilung

Damit eine diskrete Zufallsgröße als binomialverteilt angenommen werden kann, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Das Zufallsexperiment hat nur zwei Versuchsausgänge: Erfolg/Misserfolg; Gewinn/Niete; Treffer/kein Treffer; ...
- Die Wahrscheinlichkeit ändert sich nicht. (Ziehen mit Zurücklegen; Bei Befragungen sehr große Stichprobe; ...)

## Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette

Ist eine Zufallsgröße binomialverteilt, wird das Zufallsexperiment auch als Bernoulli-Experiment bezeichnet. Mehrere Ereignisse eines Bernoulli-Experimentes heißen Bernoulli-Kette.

Diese Bezeichnung ist nach dem schweizer Mathematiker Jakob I. Bernoulli (1654–1705) benannt. Achtung, es gibt eine ganze Mathematikerfamilie, aus der Jakob I. Bernoulli stammt, daher ist der Nachname absolut nicht eindeutig.

## Beispiel 1

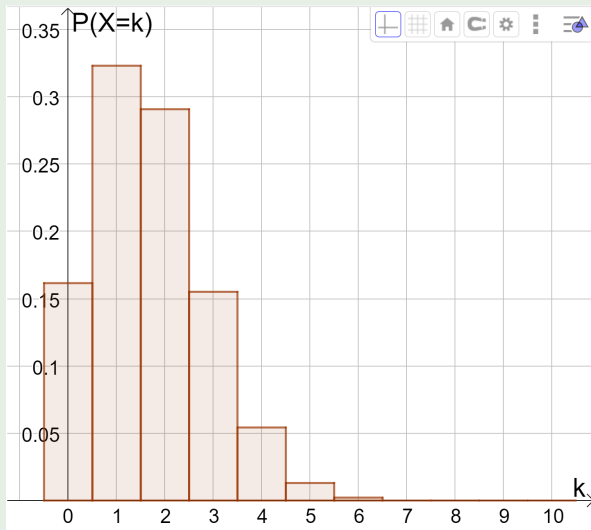


Abbildung: Binomialverteilung  $B_{10; \frac{1}{6}}$ , GeoGebra HW 2018

## A1) Bernoulli-Versuche deuten

Bei einem Eignungstest werden Fragen angekreuzt, wobei nur eine Antwort jeweils richtig ist. Wenn jemand nicht gelernt hat kann dieser Versuch als Bernoulli-Kette aufgefasst werden.

Beschreiben Sie die Ereignisse, die zu folgenden Wahrscheinlichkeiten gehören:

$$P(A) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7$$

$$P(B) = \binom{20}{15} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{15} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$P(C) = \binom{50}{31} \cdot 0,5^{31} \cdot 0,5^{19}$$

## kumulierte Wahrscheinlichkeit

Bildet man die Summe aus verschiedenen Wahrscheinlichkeiten, so spricht man von einer **kumulierten Wahrscheinlichkeit** (lat. *cumulus* = Anhäufung).

Symbolisch wird dies durch das Summenzeichen ausgedrückt mit Beginn bei  $a$  und Ende bei  $b$ :

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^b \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

## Berechnung im Rechner

Mit dem Rechner kann man diese Zufallsgrößen leicht berechnen durch den Befehl `binomcdf( $n, p, k_{\text{Anfang}}, k_{\text{Ende}}$ )`.

## Beispiel 1 – $B_{10, \frac{1}{6}}$

Rechenansätze für den schriftlichen Lösungsweg:

$$P(X \geq 7) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$P(X \geq 7) = \sum_{k=7}^{10} \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$

Im Rechner:  $\text{binomcdf}(10, \frac{1}{6}, 7, 10) \rightarrow P(X \geq 7) \approx 0,0003$

Rechenansätze für den schriftlichen Lösungsweg:

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X < 3) = \sum_{k=0}^2 \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$

Im Rechner:  $\text{binomcdf}(10, \frac{1}{6}, 0, 2) \rightarrow P(X < 3) \approx 0,7752$

- 3.2 Der Seilpark „Luftige Höhe“ bietet Parcours in drei Schwierigkeitsstufen: leicht (L), mittel (M) und schwer (S). 12 BE

Man weiß, dass etwa 22 % der Besucher S-Parcours klettern. In einer bestimmten Woche hat dieser Park 550 Besucher.

Begründen Sie, dass die Anzahl der S-Kletterer als binomialverteilt angenommen werden kann.

Berechnen Sie für folgende Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten:

(C) Genau 137 Besucher klettern S-Parcours.

(D) Höchstens ein Viertel der Besucher absolvieren S-Parcours.

**Abbildung:** Abitur M-V A3, 2017

- 3.2 In der täglichen Arbeit muss das Flüssigkeitsgemisch sehr oft hergestellt werden. Der Herstellungsprozess führt mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% zu einem brauchbaren Gemisch.

- 3.2.1 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei 20 Herstellungen des Flüssigkeitsgemisches

- genau 15
- höchstens 13
- mindestens 18

brauchbare Gemische entstehen.

**Abbildung:** Abitur M-V A3, 2014

## Erwartungswert und Standardabweichung

Für binomialverteilte Zufallsgrößen berechnen sich der **Erwartungswert** und die **Standardabweichung** folgendermaßen:

$$\mu = n \cdot p \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

## Erwartungswert in einer Verteilung

Im Histogramm der Binomialverteilung ist der Erwartungswert (manchmal näherungsweise, manchmal exakt) immer bei der höchsten Säule zu finden.

Beispiel:  $B_{10; \frac{1}{6}}$  ist  $\mu = 10 \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \approx 1,6667$        $\sigma \approx 1,1785$

## Abituraufgabe

- 1.4 Man weiß aus Erfahrung, dass bei der Produktion dieser Isoliergläser fehlerhafte Produkte mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 1,5 % auftreten. Eine Tagesproduktion umfasst 2000 Gläser.
- 1.4.1 Geben Sie den Erwartungswert an und berechnen Sie die Standardabweichung für die zufällige Anzahl fehlerhafter Gläser in einer Tagesproduktion.

Abbildung: Abitur M-V B1, 2016



- 3.1 In Deutschland wurden 2012 ca. 2,4 Mio. Verkehrsunfälle von der Polizei aufgenommen, etwa bei 1,8 % der Unfälle stand mindestens ein Unfallbeteiligter unter dem Einfluss berauschender Mittel.
- 3.1.1 Berechnen Sie, bei wie vielen Unfällen mindestens ein Unfallbeteiligter unter dem Einfluss berauschender Mittel stand.
- 3.1.2 Betrachtet werden jetzt 500 zufällig ausgewählte Verkehrsunfälle. Die Zufallsgröße  $X$  beschreibt die Anzahl der Unfälle, bei denen mindestens ein Unfallbeteiligter unter dem Einfluss berauschender Mittel stand.
- Begründen Sie, dass  $X$  als binomialverteilt angesehen werden kann und berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung dieser Zufallsgröße.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.
- A: Genau bei 10 Unfällen gab es unter Rauschmitteleinfluss stehende Beteiligte.
- B: Bei mehr als 10 Unfällen gab es unter Rauschmitteleinfluss stehende Beteiligte.
- C: Kein Unfallbeteiligter stand unter dem Einfluss berauschender Mittel.

Abbildung: Abitur M-V A3, 2015

## A2) Binomialverteilungen deuten

7. Die Grafiken zeigen Histogramme von Binomialverteilungen mit  $n = 12$ . Wie groß könnte  $p$  sein?

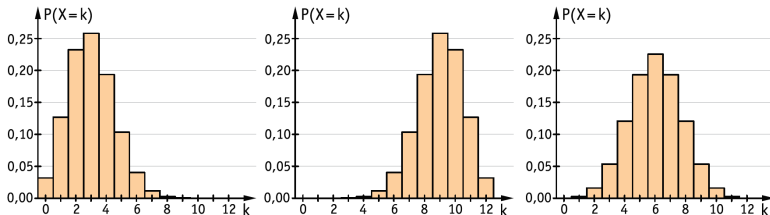


Abbildung: EdM 11 Sachsen S. 305 HW

8. Die Grafiken zeigen Histogramme von Binomialverteilungen mit  $p = 0,36$ . Wie groß könnte  $n$  sein?

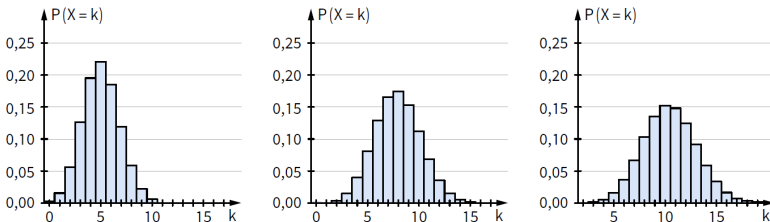


Abbildung: EdM Hessen Q3, S. 104

## Sigma-Regeln, für $\sigma > 3$

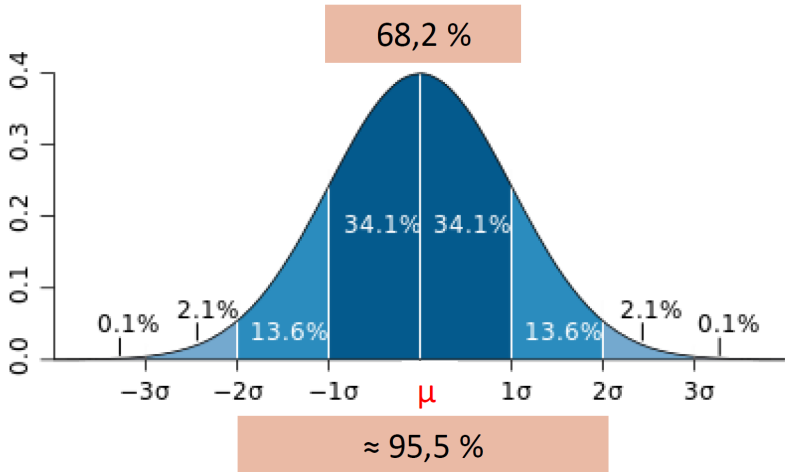


Abbildung: [https://de.wikipedia.org/wiki/Normalverteilung#/media/File:Standard\\_deviation\\_diagram.svg](https://de.wikipedia.org/wiki/Normalverteilung#/media/File:Standard_deviation_diagram.svg)

## Abituraufgabe

3.2.2 Ermitteln Sie, wie viele Gemische mindestens hergestellt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,5% mit wenigstens einem unbrauchbaren Gemisch zu rechnen ist.

Abbildung: Abitur M-V A3, 2014

Wahrscheinlichkeit für unbrauchbar:  $p = 0,2$     gesucht:  $n$

$$P(X \geq 1) > 0,995 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) > 0,995 \Leftrightarrow 0,005 > P(X = 0)$$

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{n-0} = 0,8^n$$

$$0,005 > 0,8^n \quad \Rightarrow \quad n > 23,744$$

Ab 24 Gemischen ist mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,5% mindestens ein unbrauchbares dabei.

## Abituraufgabe

3.4.3 Berechnen Sie, wie viele Personen befragt werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80% mindestens zwei Kinder unter den Besuchern zu finden.

Abbildung: Abitur M-V A3, 2016

Wahrscheinlichkeit für Kinder:  $p = 0,06$  gesucht:  $n$

Verschiedene  $n$  probieren und  $P(X \geq 2)$  berechnen.

$n$	45	47	48	49
$P(X \geq 2)$	0,761	0,782	0,792	0,801

Unter 49 Besuchern sind mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80% mindestens zwei Kinder.