1. Grenzwerte und Stetigkeit

1.2 Zahlenfolgen und Grenzwert

H. Wuschke

12. August 2021

Ziele der Sitzung

- mit Zahlenfolgen als speziellen Abbildungen umgehen
- den Grenzwert bzw. *Limes* als Konzept beschreiben
- Grenzwerte bestimmen mithilfe der Grenzwertsätze

Zahlenfolge

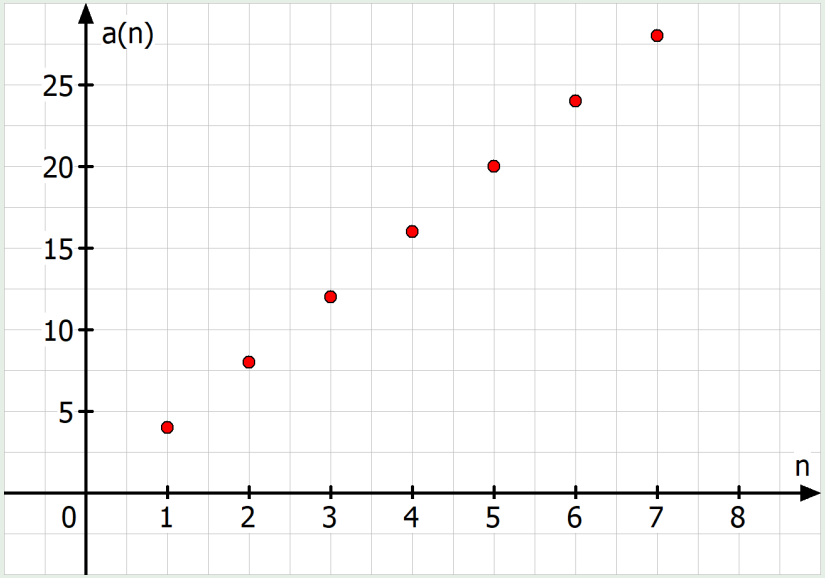
Eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; n \mapsto a_n$ heißt **reelle Zahlenfolge**. Die einzelnen Funktionswerte heißen Glieder der Zahlenfolge.

Notation: $(a_1; a_2; a_3; a_4; \ldots)$ oder $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder (a_n)

Vielfache von 4

$a_1 = 4; a_2 = 8; a_3 = 12; a_4 = 16; \ldots$

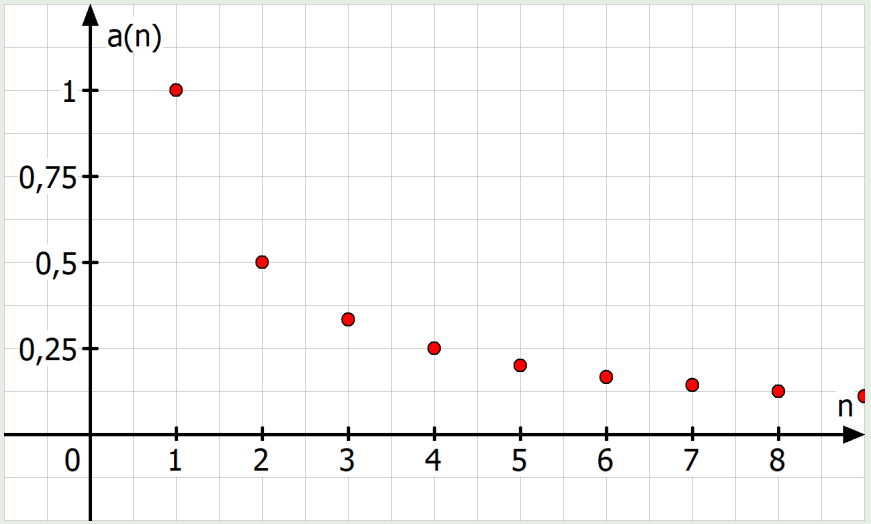
allgemein: $(a_n) = (4 \cdot n)$



Stammbrüche

$a_1 = \frac{1}{1}; a_2 = \frac{1}{2}; a_3 = \frac{1}{3}; a_4 = \frac{1}{4}; \ldots$

allgemein: $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$



weitere Beispiele

$(n)_{n\in\mathbb{N}} = (1; 2; 3; ...)$	Folge der natürlichen Zahlen
$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1; 1; -1; ...)$	alternierende Folge
$(c)_{n\in\mathbb{N}} = (c; c; c; ...)$	konstante Folge
$(2^{n-1})_{n\in\mathbb{N}} = (1; 2; 4; 8; ...)$	Zweierpotenzen

Aufgaben A1

Geben Sie die ersten zehn Folgenglieder der Zahlenfolge an.

a) $(a_n) = (7 \cdot n + 2)$

b) $(b_n) = (\sqrt[n]{6})$

c) $(c_n) = ((1 + \frac{1}{n})^n)$

d) $(d_n) = \left(\dfrac{n^2 + 2n - 1}{3n^2 - 5}\right)$

konvergent; Limes

Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $g \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geqq N_\varepsilon$ gilt:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Der Wert g heißt Grenzwert oder **Limes** der Folge (a_n).

symbolisch: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$

Epsilon-Umgebung

Der Limes einer Zahlenfolge gibt einen Wert an, dem sich die Funktion beliebig dicht nähert, ihn aber nicht notwendigerweise erreicht.
Dafür kann man sich zum Grenzwert einen beliebigen Abstand (ε) wählen und ab einem bestimmten Folgenglied a_{N_ε} haben alle nachfolgenden Folgenglieder ($n \geqq N_\varepsilon$) einen geringeren Abstand.

Beispiel

Für die Zahlenfolge $(a_n) = 30 + 90 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ist der Grenzwert $g = 30$.

Wähle beispielsweise $\varepsilon = 4$, dann ist das N_ε gesucht, für das gilt:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

$$\left|30 + 90 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n - 30\right| < 4 \quad \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} \quad n > 10,8$$

Also ist $N_\varepsilon = 11$, denn ab a_{11} gilt für alle Folgenglieder $|a_n - 30| < 4$

Wähle beispielsweise $\varepsilon = 0,004$, dann muss gelten:

$$\left|30 + 90 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n - 30\right| < 0,004 \quad \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} \quad n > 34,8$$

Also ist $N_\varepsilon = 35$, denn ab a_{35} gilt für alle Folgenglieder $|a_n - 30| < 0,004$

So kann das $\varepsilon > 0$ also beliebig klein gewählt werden und es gilt.

Veranschaulichung der Epsilon-Umgebung

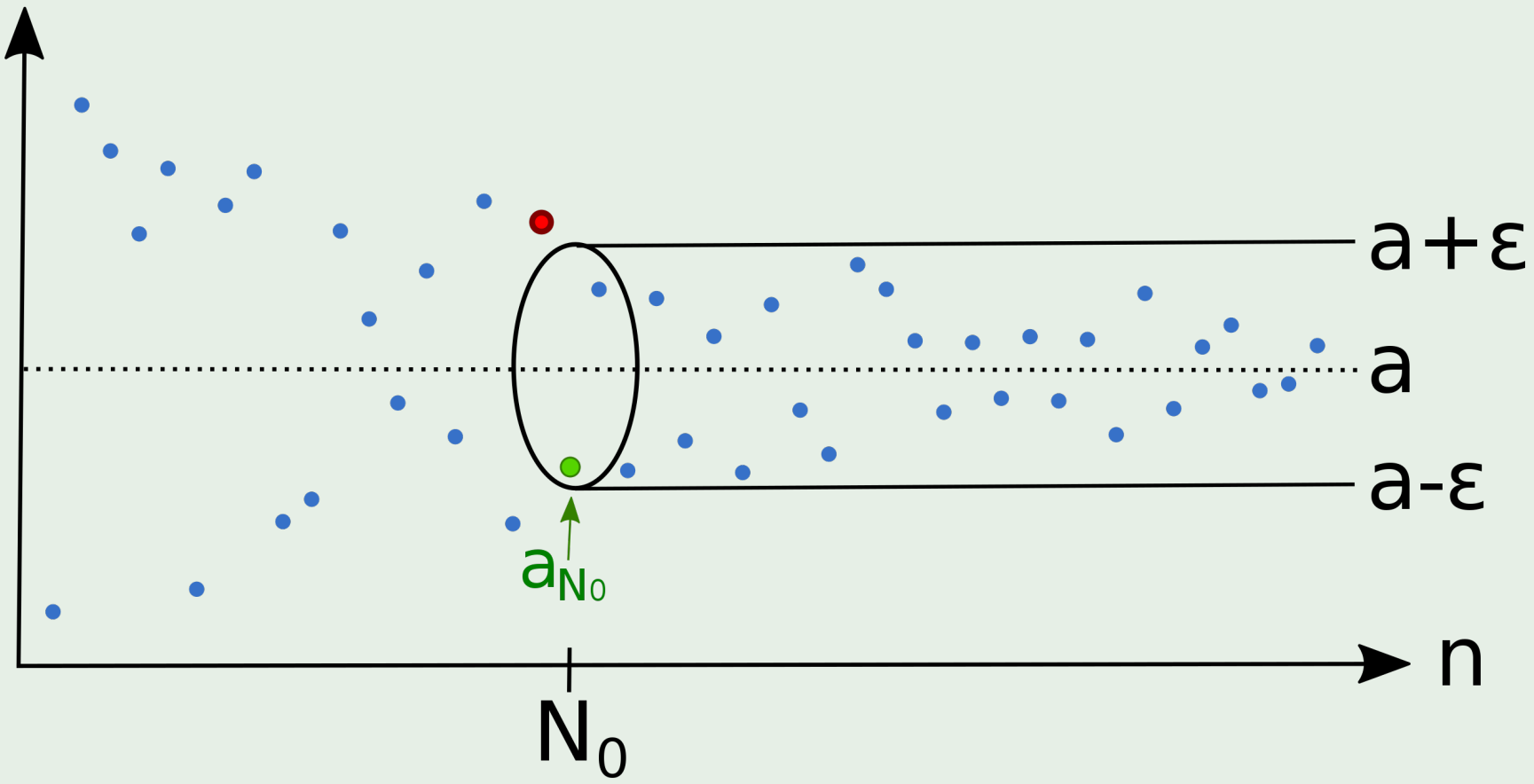


Abbildung: Veranschaulichung durch
https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_f%C3%BCr_Nicht-Freaks:_Grenzwert:_Konvergenz_und_Divergenz

Allgemeiner Nachweis für die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Die Vermutung ist, dass die Zahlenfolge gegen $g = 0$ konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.
Zu zeigen ist, dass es eine natürliche Zahl N_ε gibt, sodass für alle $n \geqq N_\varepsilon$ gilt:

$$|a_n - g| < \varepsilon \qquad \text{bzw.} \qquad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

Wähle $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ (immer möglich nach dem Satz von Archimedes), dann gilt:

$$|a_n - g| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \overset{\text{für } n \geqq N_\varepsilon}{\leqq} \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

$\square$

Daher gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

beschränkte Folge

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. (a_n) heißt

(i) nach unten beschränkt, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt: $s \leqq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(ii) nach oben beschränkt, wenn es ein $S \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt: $a_n \leqq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(iii) beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Aufgaben A2

Untersuchen Sie, ob die Folge nach oben bzw. unten beschränkt ist:

a) $(a_n) = \left(3 - \frac{1}{n}\right)$

b) $(b_n) = \left(\frac{n}{2}\right)$

c) $(c_n) = \left((-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}\right)$

d) $(d_n) = \left((-1)^n \cdot 2\right)$

Satz über Beschränktheit von Folgen

Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann beschränkt, wenn es ein $c \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n| \leqq c$

<u>Beweis:</u> Wenn $|a_n| \leqq c$ gilt, dann ist $-c \leqq a_n \leqq |a_n| \leqq c$, also ist a_n nach unten durch $-c$ und nach oben durch c beschränkt.

Wenn a_n beschränkt ist, gibt es eine untere Schranke s und eine obere Schranke S. Definiere c nun als Maximum von $|s|$ und $|S|$ (symbolisch $c := \max(|s|, |S|)$).
Dann ist $-c \leqq a_n \leqq c$ und damit gilt $|a_n| \leqq c$. $\square$

Bemerkung

Jede konvergente Folge ist beschränkt.
(Kann auch bewiesen werden.)

Nicht jede beschränkte Folge ist konvergent.
Beispiel: $(a_n) = ((-1)^n)$

Grenzwertsätze

Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit den Grenzwerten $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ für $(b \neq 0)$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

Beweis von (i)

$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leqq |a_n - a| + |b_n - b|$.

Da (a_n) und (b_n) nach Voraussetzung konvergent sind, gilt:

$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqq N_{\varepsilon_1}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqq N_{\varepsilon_2}$

Also ist $|a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für alle $n \geqq \max(N_{\varepsilon_1}, N_{\varepsilon_2})$. $\square$

Sandwich-Theorem

Seien $(a_n), (b_n)$ und (c_n) drei Zahlenfolgen. Es gelte für alle $n \geqq N \in \mathbb{N} : a_n \leqq b_n \leqq c_n$. Außerdem sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$

Dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Aufgaben A3

Bestimmen Sie den Grenzwert der gegebenen Folge.

a) $(a_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

b) $(b_n) = \left(-8 + \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$

c) $(c_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)$

d) $(d_n) = \left(\frac{2n+1}{n^2}\right)$

e) $(e_n) = \left(\frac{3n^2-4n^3+5}{2n^3-5n+9}\right)$