Stammfunktionen und unbestimmte Integrale (03.11.2022)

H. Wuschke

Alle Aufgaben sind **ohne CAS** zu bearbeiten. Der CAS hilft bei der Überprüfung.

Aufgabe 1 (für a)-d) je 1 BE & e)-h) je 2 BE)

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale **ohne** Hilfsmittel.

a) $\int -2\ dx = -2x + c$

b) $\int 6x\ dx = 3x^2 + c$

c) $\int 3x\ dx = \frac{3}{2}x^2 + c$

d) $\int (2x - 1)\ dx = x^2 - x + c$

e) $\int (\frac{1}{2}t^3 + t)\ dt = \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + c$

f) $\int \left(\frac{3}{a^2} + a^2 + 1\right)\ da = -\frac{3}{a} + \frac{1}{3}a^3 + a + c$

g) $\int (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\ dx = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + c$

h)* $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2x\right)\ dx = 2\sqrt{x} - x^2 + c$

Aufgabe 2 (32 BE)

Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x) = 8x^3 - 12x^2$ für die gilt:

$\int \left(8x^3 - 12x^2\right) dx = 2x^4 - 4x^3 + c \qquad \rightarrow \qquad F(x) = 2x^4 - 4x^3 + c$

a) $F(0) = 3$

$F(0) = 2 \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^3 + c = c \quad \rightarrow \quad c = 3$

$\Rightarrow \underline{\underline{F(x) = 2x^4 - 4x^3}}$

b) $F(1) = 2$

$F(1) = 2 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^3 + c = -2 + c \quad \rightarrow \quad -2 + c = 2 \quad \rightarrow \quad c = 4$

$\Rightarrow \underline{\underline{F(x) = 2x^4 - 4x^3 + 4}}$

c) $F(1) = -5$

$F(1) = 2 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^3 + c = -2 + c \quad \rightarrow \quad -2 + c = -5 \quad \rightarrow \quad c = -3$

$\Rightarrow \underline{\underline{F(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3}}$

d) $F(-1) = 2$

$F(-1) = 2 \cdot (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 + c = 6 + c \quad \rightarrow \quad 6 + c = 2 \quad \rightarrow \quad c = -4$

$\Rightarrow \underline{\underline{F(x) = 2x^4 - 4x^3 - 4}}$

e) $F(2) = 2$

$F(2) = 2 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 + c = 0 + c \quad \rightarrow \quad c = 2$

$\Rightarrow \underline{\underline{F(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2}}$

f) $F(2) = -20$

$F(2) = 2 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 + c = 0 + c \quad \rightarrow \quad c = -20$

$\Rightarrow \underline{\underline{F(x) = 2x^4 - 4x^3 - 20}}$

g) $F(-2) = 7$

$F(-2) = 2 \cdot (-2)^4 - 4 \cdot (-2)^3 + c = 64 + c \quad \rightarrow \quad 64 + c = 7 \quad \rightarrow \quad c = -57$

$\Rightarrow \underline{\underline{F(x) = 2x^4 - 4x^3 + -57}}$

h) $F(10) = 100$

$F(10) = 2 \cdot 10^4 - 4 \cdot 10^3 + c = 16.000 + c \quad \rightarrow \quad 16.000 + c = 100 \quad \rightarrow \quad c = -15.900$

$\Rightarrow \underline{\underline{F(x) = 2x^4 - 4x^3 - 15.900}}$

Bestimmen Sie auf gleiche Art und Weise die gesuchten Stammfunktionen für $f(x) = 3x^2 - 8x$.

$\int \left(3x^2 - 8x\right) dx = x^3 - 4x^2 + c \qquad \rightarrow \qquad F(x) = x^3 - 4x^2 + c$

a) $F(0) = 3 \qquad \ldots \Rightarrow \underline{\underline{F(x) = x^3 - 4x^2}}$

b) $F(1) = 2 \qquad \ldots \Rightarrow \underline{\underline{F(x) = x^3 - 4x^2 + 5}}$

c) $F(1) = -5 \qquad \ldots \Rightarrow \underline{\underline{F(x) = x^3 - 4x^2 - 2}}$

d) $F(-1) = 2 \qquad \ldots \Rightarrow \underline{\underline{F(x) = x^3 - 4x^2 + 7}}$

e) $F(2) = 2 \qquad \ldots \Rightarrow \underline{\underline{F(x) = x^3 - 4x^2 + 10}}$

f) $F(2) = -20 \qquad \ldots \Rightarrow \underline{\underline{F(x) = x^3 - 4x^2 - 12}}$

g) $F(-2) = 7 \qquad \ldots \Rightarrow \underline{\underline{F(x) = x^3 - 4x^2 + 31}}$

h) $F(10) = 100 \qquad \ldots \Rightarrow \underline{\underline{F(x) = x^3 - 4x^2 - 500}}$

Aufgabe 3 (8 BE)

Bestimmen Sie die gesuchten Integralfunktionen für $f(x) = 3x + \frac{5}{2}$.

$\int \left(3x + \frac{5}{2}\right) dx = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + c \qquad \rightarrow \qquad F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + c$

a) $I_3(x)$

$F(3) = 0 \qquad \rightarrow \qquad F(3) = \frac{3}{2} \cdot 3^2 + \frac{5}{2} \cdot 3 + c = 21 + c \quad \rightarrow \quad 21 + c = 0 \qquad \rightarrow \qquad c = -21$

$\Rightarrow \underline{\underline{I_3(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 21}}$

b) $I_{-2}(x)$

$F(-2) = 0 \quad \rightarrow \quad F(-2) = \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 + \frac{5}{2} \cdot (-2) + c = 1 + c \quad \rightarrow \quad 1 + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = -1$

$\Rightarrow \underline{\underline{I_{-2}(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1}}$

c) $I_{15}(x)$

$F(15) = 0 \quad \rightarrow \quad F(15) = \frac{3}{2} \cdot 15^2 + \frac{5}{2} \cdot 15 + c = 375 + c \quad \rightarrow \quad 375 + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = -375$

$\Rightarrow \underline{\underline{I_{15}(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 375}}$

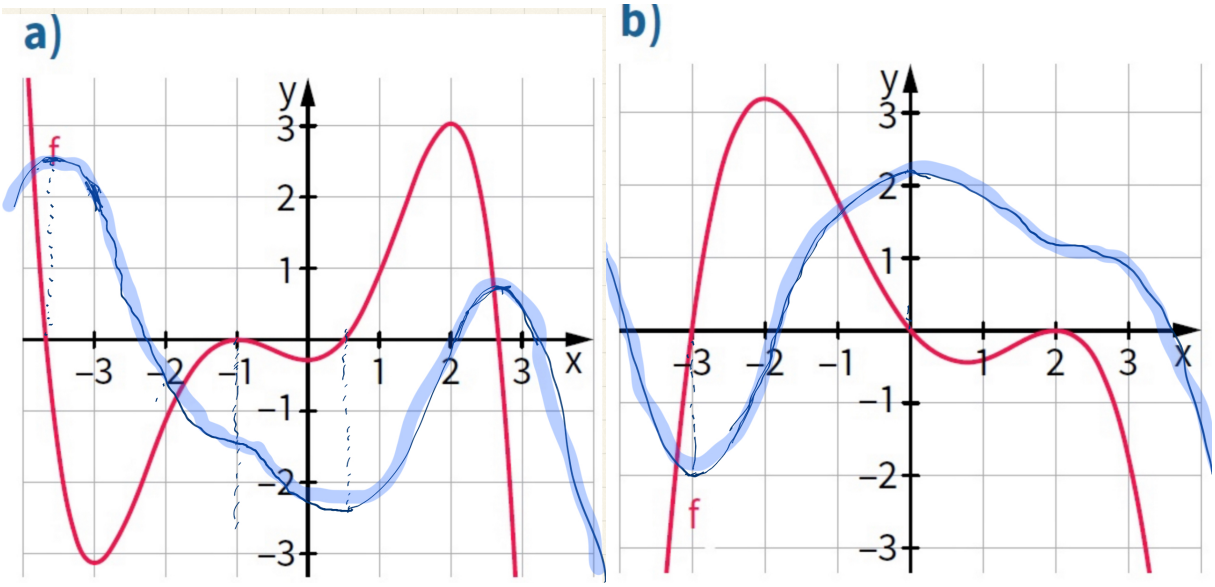
d) $I_{40}(x)$

$F(40) = 0 \quad \rightarrow \quad F(40) = \frac{3}{2} \cdot 40^2 + \frac{5}{2} \cdot 40 + c = 2.500 + c \quad \rightarrow \quad 2.500 + c = 0 \rightarrow c = -2.500$

$\Rightarrow \underline{\underline{I_{40}(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 2.500}}$

Aufgabe 4 (6 BE)

Zeichnen Sie in das Koordinatensystem eine mögliche Stammfunktion der gegebenen Funktion $f(x)$.



Aufgabe 5 (12 BE)

Ordnen Sie dem jeweiligen blauen Funktionsgraphen ihre rote Stammfunktion zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung kurz.

Die Zuordnungen sind: 1F; 2D; 3E; 4A; 5C und 6B.
Dies kann immer mit den Extremstellen begründet werden, da an den Extremstellen der roten Funktion jeweils die Nullstellen der blauen Funktion sind.
Außerdem ist die Monotonie der Funktion nutzbar: In den Bereichen, wo die rote Funktion steigt, muss die blaue Funktion im positiven Bereich sein und umgekehrt wenn die rote Funktion fällt, muss die blaue Funktion im negativen Bereich sein.
Ein letztes Argument wäre der Grad der Funktion. Zum Beispiel ist Abbildung 1 eine Stammfunktion mindestens 3. Grades, deshalb muss die Funktion selbst mindestens 2. Grad haben, Das trifft nur auf A und F zu.

Aufgabe 6 (6 BE)

Bestimmen Sie die Stammfunktion mithilfe von partieller Integration.

$$\int f'(x) \cdot g(x)\ dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\ dx$$

a) $\int e^x \cdot (2 - x^2)\ dx$

$(2 - x^2)$ lässt sich gut ableiten, deshalb ist dies $g(x) = (2 - x^2)$ und $g'(x) = -2x$.

e^x lässt sich gut integrieren, deshalb ist $f'(x) = e^x$ und $f(x) = e^x$

Damit erhält man: $\int e^x \cdot (2 - x^2)\ dx = e^x \cdot (2 - x^2) - \int e^x \cdot (-2x) + c$

Das hintere Integral muss erneut auf gleiche Art und Weise integriert werden:

$$\int e^x \cdot (-2x)\ dx = e^x \cdot (-2x) - \int e^x \cdot (-2)\ dx = e^x \cdot (-2x) + 2 \cdot e^x = e^x \cdot (-2x + 2) + c$$

Also ist

$$\int e^x \cdot (2 - x^2) = e^x \cdot (2 - x^2) - (e^x \cdot (-2x + 2)) = e^x \cdot (-x^2 + 2x) + c$$

b) $\int \cos(x) \cdot x^2\ dx$

x^2 lässt sich gut ableiten, deshalb ist dies $g(x) = x^2$ und $g'(x) = 2x$.

$\cos(x)$ lässt sich gut integrieren, deshalb ist $f'(x) = \cos(x)$ und $f(x) = \sin(x)$

Damit erhält man: $\int \cos(x) \cdot x^2\ dx = \sin(x) \cdot x^2 - \int \sin(x) \cdot 2x + c$

Das hintere Integral muss erneut auf gleiche Art und Weise integriert werden:

$$\int \sin(x) \cdot 2x\ dx = -\cos(x) \cdot 2x - \int -\cos(x) \cdot 2\ dx + c = -\cos(x) \cdot 2x + 2 \cdot \sin(x) + c$$

Also ist

$$\int \cos(x) \cdot x^2 = \sin(x) \cdot x^2 - (-\cos(x) \cdot 2x + 2\sin(x)) + c = (x^2 - 2) \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) + c$$

c) $\int e^{-x} \cdot \cos(x)\ dx$

Hier ist $g(x) = e^{-x}$ und $g'(x) = -e^{-x}$ $\qquad f'(x) = \cos(x)$ und $f(x) = \sin(x)$.

$$\int e^{-x} \cdot \cos(x)\ dx = e^{-x} \cdot \sin(x) - \int -e^{x} \cdot \sin(x)\ dx + c = e^{-x} \cdot \sin(x) + \int e^{-x} \cdot \sin(x)\ dx + c$$

$$e^{-x} \cdot \sin(x)\ dx = e^{-x} \cdot (-\cos(x)) - \int (-e^{-x} \cdot (-\cos(x))\ dx + c = -e^{-x} \cdot \cos(x) - \int e^{-x} \cdot \cos(x)\ dx + c$$

Es ist also

$$\int e^{-x} \cdot \cos(x)\ dx = e^{-x} \cdot \sin(x) - e^{-x} \cdot \cos(x) - \int e^{-x} \cdot \cos(x)\ dx + c$$

Auf der linken und rechten Seite der Gleichung steht das gleiche Integral (wie im Unterricht). Deshalb kann das negative Integral durch Addition auf die andere Seite der Gleichung gezogen werden.

$$2 \cdot \int e^{-x} \cdot \cos(x)\ dx = e^{-x} \cdot (\sin(x) - \cos(x)) + c$$

$$\int e^{-x} \cdot \cos(x)\ dx = \frac{e^{-x} \cdot (\sin(x) - \cos(x))}{2} + c$$

d) $\int \ln(x)\ dx$

Hier steht scheinbar nur eine Funktion... Wir können $\ln(x)$ ableiten zu $\frac{1}{x}$... Deshalb behilft man sich mit einem kleinen Trick:

$$\int \ln(x)\ dx = \int 1 \cdot \ln(x)\ dx$$

Nun ist $f'(x) = 1$ und $f(x) = x$ $\qquad g(x) = \ln(x)$ und $g'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\int 1 \cdot \ln(x)\ dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\ dx + c = x \cdot \ln(x) - \int 1\ dx + c = x \cdot \ln(x) - x + c$$