4. Stochastik

4.1 Grundbegriffe der Stochastik

H. Wuschke

12. August 2020

Ziele der Sitzung

- Grundbegriffe der Mengenlehre symbolisch beschreiben und Mengenoperation ausführen
- Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschreiben
- Zufallsexperimente in mehrstufigen Baumdiagrammen darstellen
- Eigenschaften von Laplace-Experiment beschreiben
- Ergebnismengen angeben

Begriffe in der Mengenlehre

Definition einer Menge (Georg Cantor, 1869)

„Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung $\mathcal{M}$ von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von $\mathcal{M}$ genannt werden) zu einem Ganzen."

$a \in \mathcal{M}$ (a ist ein Element von $\mathcal{M}$) $\emptyset$ - die leere Menge

$a \notin \mathcal{M}$ (a ist kein Element von $\mathcal{M}$)

Beispiele

1. $\mathcal{M} = \{1, 3, 4, 17, 42\}$, dann ist bspw. $42 \in \mathcal{M}$, aber $2 \notin \mathcal{M}$
   $\{1, 3, 1, 17, 4, 3, 1, 42, 1\} = \{1, 3, 4, 17, 42\}$ – jedes Element kommt nur einmal vor
2. $\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen

Mengenbeziehungen

Seien $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ Mengen.

$\mathcal{M}_1 \subseteqq \mathcal{M}_2 \Leftrightarrow$ alle Elemente von $\mathcal{M}_1$ sind auch in $\mathcal{M}_2$ enthalten.
($\mathcal{M}_1$ ist Teilmenge von $\mathcal{M}_2$)

$\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \Leftrightarrow$ alle Elemente von $\mathcal{M}_1$ sind auch in $\mathcal{M}_2$ enthalten
<u>und</u> es gibt Elemente in $\mathcal{M}_2$, die nicht in $\mathcal{M}_1$ sind.
($\mathcal{M}_1$ ist echte Teilmenge von $\mathcal{M}_2$)

$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 \Leftrightarrow \mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ enthalten die selben Elemente
($\mathcal{M}_1$ gleich $\mathcal{M}_2$)

Bemerkung

Es gilt stets: $\mathcal{M} \subseteqq \mathcal{M}$ und $\emptyset \subseteqq \mathcal{M}$.

Ist $\mathcal{M}_1 \subseteqq \mathcal{M}_2$ und $\mathcal{M}_2 \subseteqq \mathcal{M}_1$, dann gilt: $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$

implizite und explizite Angabe von Mengen

Mengen können auf zwei Arten angegeben werden:

1. Explizite Angabe aller Elemente:
$\mathcal{M}_1 = \{1, 3, 6, 7\}$; $\mathcal{M}_2 = \{\heartsuit, \bigstar, \square\}$

2. Implizite Angabe der charakteristischen Eigenschaft:
$\mathcal{M}_3 = \{x \mid x \text{ ist Primzahl}\}$; $\mathcal{M}_4 = \{k : k \text{ ist Küchengerät}\}$

Beispiele

1. Sei $\mathcal{A} = \{k \mid k \text{ ist bestandene Klausur}\}$
und $\mathcal{B} = \{K \mid K \text{ ist Klausur}\}$, dann ist $\mathcal{A} \subseteqq \mathcal{B}$.
Wenn alle Klausuren bestanden wurden, dann ist $\mathcal{A} = \mathcal{B}$,
ansonsten sogar $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$
2. $\{2 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{k \mid k \in \mathbb{N}, k \text{ ist gerade}\} \subseteqq \mathbb{N}$
3. $\{1, 4\} \subseteqq \{1, 2, 3, 4\}$ bzw. sogar $\{1, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$

A1) Mengendarstellungen

Geben Sie die folgenden Mengen explizit an:

1. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x \leqq 8\}$
2. $B = \{y \mid y \in \mathbb{Z},\ |y| < 5\}$
3. $C = \{w \mid w = 2 \cdot k - 1,\ k \in \mathbb{N},\ w < 12\}$

Bei den nachfolgenden Mengen wünscht man sich eine implizite Schreibweise. Geben Sie diese an.

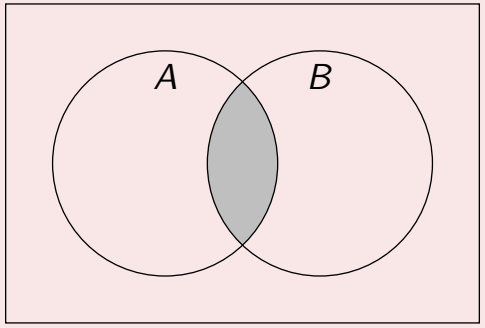
1. $D = \{5, 10, 15, 20, 25, ...\}$
2. $E = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, ...\}$
3. $F = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, ...\}$
4. $G = \left\{..., -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, ...\right\}$

Mengenoperationen

Durchschnitt

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Heißt **Durchschnitt** der Mengen A und B.



Ist $A \cap B = \emptyset$, so heißen A und B **disjunkt**.

Beispiele

1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{1, 2\}$

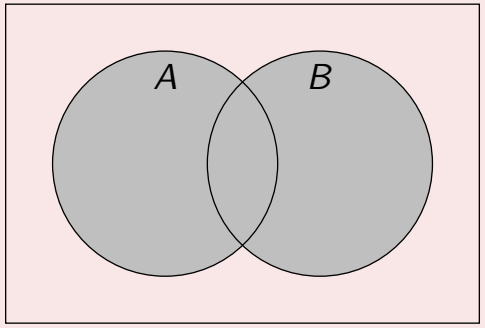
   $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 7\} \cap \{y \mid y \in \mathbb{Z}, |y| \leqq 3\} = \{1, 2, 3\}$
2. $\{2 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \{p \mid p \text{ ist Primzahl}\} = \{2\}$

Vereinigung

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

Heißt **Vereinigung** der Mengen A und B.

(Das oder ist ein mathematisches - „nicht ausschließendes oder“.)



Beispiele

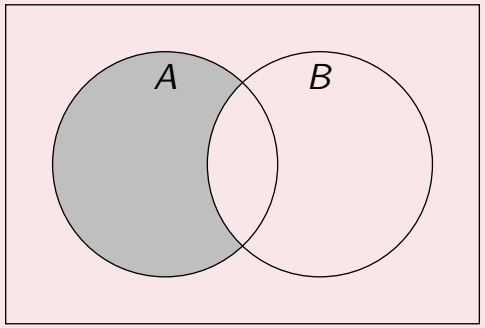
1. $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{0, 1, 2\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
2. $\mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Differenzmenge

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

Heißt **Differenzmenge** „A ohne B“.

(Achtung: A/B ist die Faktormenge!)



Beispiele

1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \setminus \{p \mid p \text{ ist Primzahl }\} = \{1, 4, 6, 8\}$
2. $\{4 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\} \setminus \{2 \cdot m \mid m \in \mathbb{N}\} = \emptyset$
3. $\{S \mid S \text{ ist Säugetier }\} \setminus \{L \mid L \text{ Tier, das an Land lebt}\}$
   $= \{Wal, Robbe, Seekuh, Seeotter\}$,

   wobei natürlich $\{Delphin\} \subseteq \{Wal\}$ gilt.

Was ist Zufall?

Abbildung: Plakat Schauspiel Leipzig [HW 2014]

Abbildung: Buchmesse Leipzig [HW 2013]

Was ist Zufall?

Abbildung: Einsamer Drucker [HW 2017]

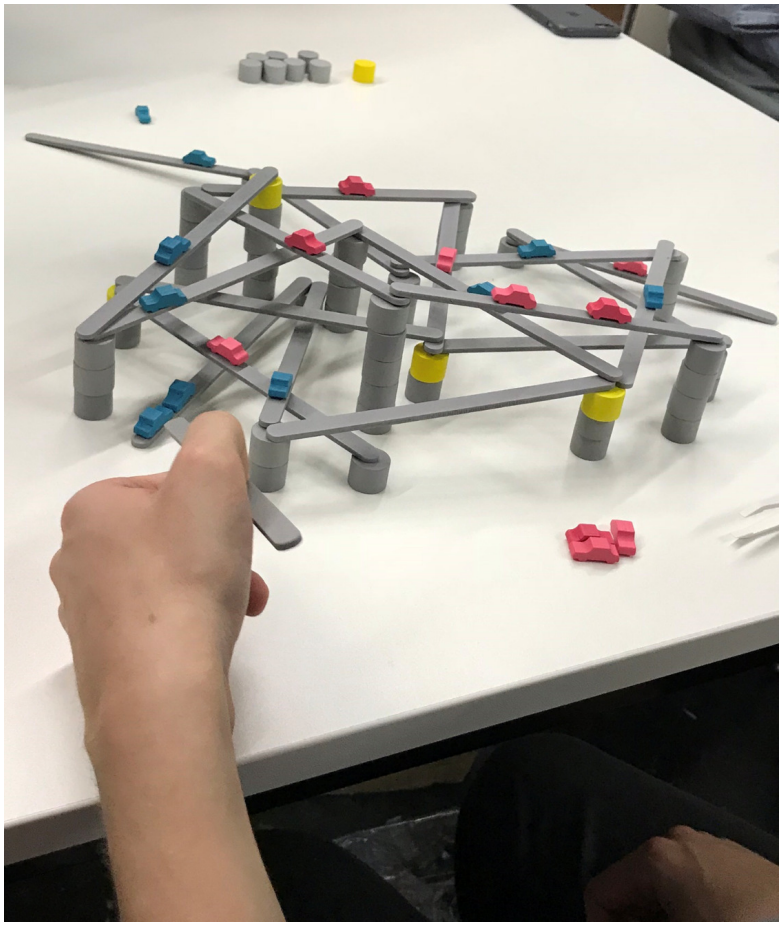


Abbildung: Tokyo Highway [HW 2018]

Zufallsexperiment, Ergebnis, Ereignis, Wahrscheinlichkeit

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Vorgang mit ungewissem Ausgang.

Das Resultat bzw. der Ausgang eines Zufallsexperimentes heißt (Versuchs-)**Ergebnis** oder Elementarereignis.
(Mehrere) Ergebnisse werden zu einem (Versuchs-)**Ereignis** zusammengefasst.

Jedem Ergebnis/Ereignis E wird eine **Wahrscheinlichkeit** $P(E)$ mit $0 \leqq P(E) \leqq 1$ zugewiesen.

Ist $P(E) = 0$, so spricht man vom unmöglichen Ereignis.
Isr $P(E) = 1$, so spricht man vom sicheren Ereignis.

Beispiel – Würfeln

Ein gewöhnlicher Würfel (Hexaeder) wird geworfen und die Augenzahl bestimmt.
$P(2 \text{ oder } 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\quad P(\text{Zahl kleiner als } 7) = 1$; $\quad P(7) = 0$

In der Praxis treten die Ereignisse nicht so auf, wie wir sie mathematisch berechnen. Sonst würde man beispielsweise bei sechs Mal würfeln definitiv eine 3 würfeln.

(schwaches) Gesetz der großen Zahlen

Wird ein Zufallsexperiment sehr oft wiederholt, nähert sich die relative Häufigkeit mit zunehmender Versuchszahl der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit an.

Beispiel Ereignis: Würfeln einer 3 mit normalem Würfel

$P(E) = \frac{1}{6} \approx 0,1667$

`http://www.henked.de/begriffe/wahrscheinlichkeit.htm#gesetz`

An dem Beispiel sieht man, dass je größer die Anzahl n der Versuche wird, umso näher kommen wir an $\frac{1}{6}$ heran.

Ergebnismenge und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Die Menge aller möglichen Ergebnisse wird als **Ergebnismenge Ω** oder Ergebnisraum Ω bezeichnet.

Es gilt: $P(\Omega) = 1$
(Die Wahrscheinlichkeit aller Ergebnisse ist sicher).

Die Wahrscheinlichkeit aller Ergebnisse wird als **Wahrscheinlichkeitsverteilung** bezeichnet.

Beispiele für Ergebnismengen und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Einmaliges Werfen einer Münze: $\Omega = \{\text{Wappen}; \text{Zahl}\}$

$$P(\text{Wappen}) = \frac{1}{2} \qquad P(\text{Zahl}) = \frac{1}{2}$$

Zweimaliges Werfen einer Münze: $\Omega = \{\text{WW}; \text{WZ}; \text{ZW}; \text{ZZ}\}$

$$P(WW) = \frac{1}{4} \qquad P(WZ) = \frac{1}{4} \qquad P(ZW) = \frac{1}{4} \qquad P(ZZ) = \frac{1}{4}$$

Beispiele für Ergebnismengen und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Werfen einer Münze, bis zweimal W oder zweimal Z erschien:

$\Omega = \{\mathrm{WW}; \mathrm{ZZ}; \mathrm{WZW}; \mathrm{WZZ}; \mathrm{ZWW}; \mathrm{ZWZ}\}$

$$P(WW) = \frac{1}{4} \qquad P(ZZ) = \frac{1}{4} \qquad P(WZW) = \frac{1}{8}$$

$$P(WZZ) = \frac{1}{8} \qquad P(ZWW) = \frac{1}{8} \qquad P(ZWZ) = \frac{1}{8}$$

Würfeln eines Tetraeders und danach eine Münze werfen:

$\Omega = \{1\mathrm{W}; 1\mathrm{Z}; 2\mathrm{W}; 2\mathrm{Z}; 3\mathrm{W}; 3\mathrm{Z}; 4\mathrm{W}; 4\mathrm{Z}\}$

$$P(1W) = \frac{1}{8} \quad P(1Z) = \frac{1}{8} \quad P(2W) = \frac{1}{8} \quad P(2Z) = \frac{1}{8}$$

$$P(3W) = \frac{1}{8} \quad P(3Z) = \frac{1}{8} \quad P(4W) = \frac{1}{8} \quad P(4Z) = \frac{1}{8}$$

Laplace-Experiment

Ist jedes Ergebnis E in der Ergebnismenge Ω gleich wahrscheinlich, so spricht man von einem **Laplace[a]-Experiment**

[a] Pierre-Simon Laplace (1749–1827), frz. Mathematiker

Abbildung: Dodekaeder, CC-Zero

Beispiele – Würfeln mit einem Dodekaeder

$\Omega = \{\text{gerade Zahl}; \text{ungerade Zahl}\}$ – Laplace Experiment
$\Omega = \{1; 2; 3; \ldots; 11; 12\}$ – Laplace-Experiment
$\Omega = \{\text{Primzahl}; \text{keine Primzahl}\}$ – kein Laplace-Experiment
$\Omega = \{\text{Zahl kleiner 5}; \text{Zahl größer 7}\}$ – ist keine gültige Ergebnismenge und erst recht kein Laplace-Experiment

Ereignisse bei Laplace-Experimenten

Da alle Ergebnisse bei Laplace-Experimenten gleich wahrscheinlich sind, gilt für jedes Ereignis E die Berechnung:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der } \textit{günstigen} \text{ Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Beispiel Zahlenschloss

Herr Wuschke hat einen Koffer mit drei Zahlenrädern, bei denen die Ziffern 0 bis 9 einstellbar sind. Er sucht sich zufällig einen Code aus. Wie wahrscheinlich ist es, dass er einen Code mit drei gleichen Ziffern eingestellt hat?

Günstige Ergebnisse sind $000, 111, \ldots, 999$ und damit sind es 10.

$$P(E) = \frac{\cancel{10}}{\cancel{10} \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{100} = 1\%$$

Gegenereignis

Das **Gegenereignis** $\overline{E}$ ist das Gegenteil eines Ereignisses E.
Es gilt:

$$P(E) + P(\overline{E}) = P(\Omega) = 1$$

Ereignis und Gegenereignis sind der Ergebnisraum.

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Beispiel dreifacher Münzwurf

Eine Münze wird dreimal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit mindestens einmal Wappen zu werfen.

Gegenereignis $\overline{E}$: Kein Wappen werfen, also ZZZ

$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - P(ZZZ) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 87,5\%$

Baumdiagramm

Zur Veranschaulichung von (mehrstufigen) Zufallsexperimenten kann ein **Baumdiagramm** genutzt werden. Die Zweige zeigen dabei die einzelnen Ergebnisse der jeweiligen Stufe an und die Pfade sind verschiedene Ereignisse.

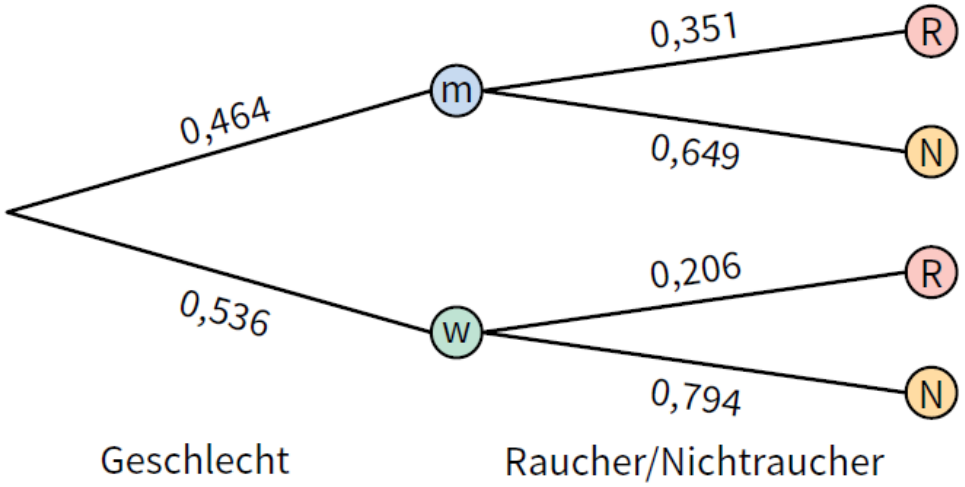


Abbildung: EdM Sachsen 11, S. 256, HW

Pfadregeln

1. Entlang des Pfades wird multipliziert.
2. Mehrere Pfade werden addiert.

A2) Auswahl der Kurse Klasse 12A/B

In diesem Schuljahr sind die Leistungskursschienen folgendermaßen belegt:
Schiene 1: Deutsch (13), Englisch (15), Mathematik (11)
Schiene 2: Biologie (11), Geschichte (11), Kunst (9), Physik (8).

a) Stellen Sie die Kurswahl in einem Baumdiagramm dar.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung.

c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für die Leistungskurskombinationen Mathematik-Physik, Deutsch-Geschichte, Englisch-Biologie und Deutsch-Kunst an.

Abitur MV 2011, A3

A3 Analysis und Stochastik

3.1 Bei einer Verkehrskontrolle werden die Geschwindigkeit sowie die Einhaltung der Anschnallpflicht der Fahrzeugführer kontrolliert. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass 3% der Fahrzeugführer nicht angeschnallt sind sowie 10% die zulässige Höchstgeschwindigkeit überschreiten. Beide Vergehen treten unabhängig voneinander auf. Ein Fahrzeug ist vorschriftsmäßig unterwegs, wenn sein Fahrzeugführer angeschnallt ist und die zulässige Geschwindigkeit einhält. Insgesamt werden 372 Fahrzeuge überprüft.

3.1.1 Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug die Kontrollstelle vorschriftsmäßig passiert.

Abitur MV 2010, B3

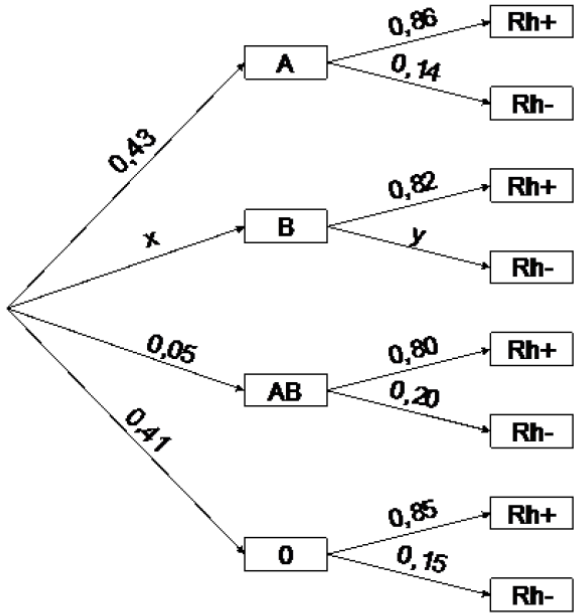


Abbildung 1: Blutgruppenverteilung in Deutschland

Empfänger \ Spender	0-	0+	B-	B+	A-	A+	AB-	AB+
AB+	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
AB-	☺	☠	☺	☠	☺	☠	☺	☠
A+	☺	☺	☠	☠	☺	☺	☠	☠
A-	☺	☠	☠	☠	☺	☠	☠	☠
B+	☺	☺	☺	☺	☠	☠	☠	☠
B-	☺	☠	☺	☠	☠	☠	☠	☠
0+	☺	☺	☠	☠	☠	☠	☠	☠
0-	☺	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠

Tabelle 1: Verträglichkeit der Blutgruppen
☺ bedeutet, dass eine Blutübertragung möglich ist

3.1 Berechnen Sie die Zahlenwerte für x und y aus der Abbildung 1.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: Eine zufällig ausgewählte Person hat die Blutgruppe A+.
B: Eine zufällig ausgewählte Person hat den Rhesusfaktor (Rh+).
C: Eine zufällig ausgewählte Person kann von jedermann eine verträgliche Bluttransfusion erhalten.

3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person mit der Blutgruppe A+ von einer zufällig ausgewählten Person eine Blutspende erhalten kann.

Nützliche Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen

Für zwei Ereignisse A und B gelten folgende Rechenregeln für die Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (A \text{ und } B \text{ sind abhängig})$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \qquad (A \text{ und } B \text{ sind unabhängig})$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad (A \text{ und } B \text{ sind unabhängig})$$

4. Stochastik

4.2 Diskrete Zufallsgrößen

H. Wuschke

20. August 2020

Ziele der Sitzung

- Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Werte einer Zufallsgröße berechnen
- eine Verteilung grafisch und tabellarisch für eine Zufallsgröße aufstellen
- diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden
- Erwartungswert und Standardabweichung für diskrete Zufallsgrößen berechnen und interpretieren

Fäden, Kreise und Wahrscheinlichkeiten

1. Zwei Fäden werden zufällig (man sieht nicht welches Ende zu welchem Faden gehört) miteinander verknotet. Es entsteht ein großer Kreis oder zwei kleine Kreise. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Kreis und für zwei Kreise.

2. Führen Sie den Zufallsversuch nun mit drei Fäden durch und beschreiben Sie die Versuchsausgänge.

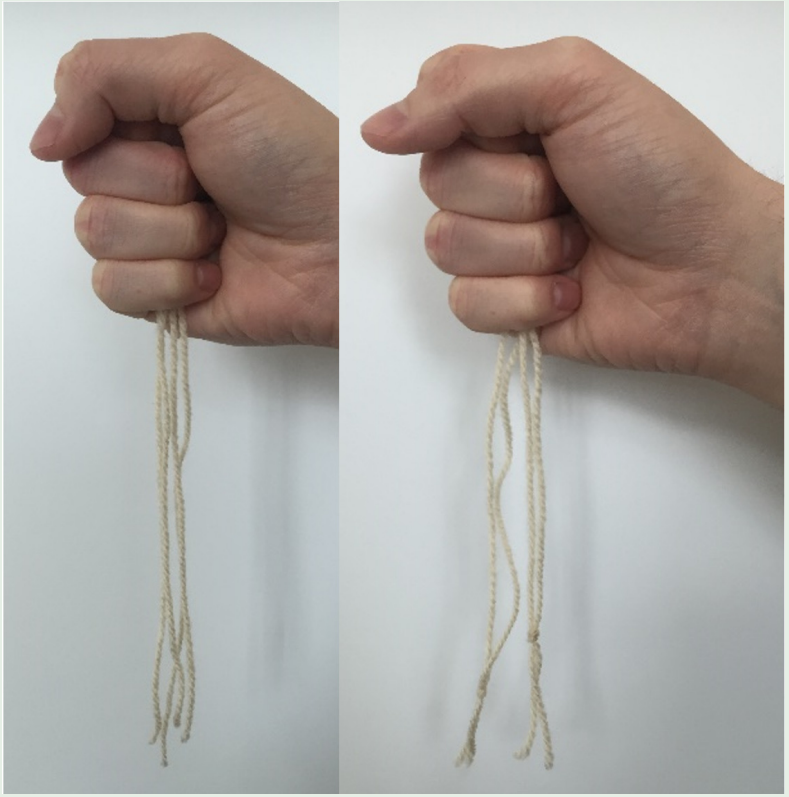


Abbildung: HW, 2017

Lösung der Aufgabe

1.

Anzahl der Kreise	1	2
Wahrscheinlichkeit	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

2.

Anzahl der Kreise	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$

Die Anzahl der Kreise ist eine diskrete Zufallsgröße, der wiederum eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet wurde.

diskrete und stetige Zufallsgrößen

Eine Funktion X, die jedem Ergebnis eines Zufallsversuches eine reelle Zahl k zuordnet, heißt **Zufallsgröße**. Symbolisch: $X = k$

Man spricht von **stetigen Zufallsgrößen**, wenn die Funktion auf reelle Intervalle abbildet.
Man spricht von **diskreten Zufallsgrößen**, wenn die Funktion endlich viele Werte annimmt.

Abbildung: Wiegen von Brötchen im Hbf Leipzig [HW, 2017]

Verteilung

Die (Wahrscheinlichkeits-)**Verteilung** ist eine Funktion, die jedem Wert einer Zufallsgröße ihre Wahrscheinlichkeit zuordnet.
Symbolisch: $P(X = k)$ mit $0 \leqq P(X = k) \leqq 1$.

Diese Funktion heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung** bei diskreten Zufallsgrößen und **Dichtefunktion** bei stetigen Zufallsgrößen.

Tabellarische Wahrscheinlichkeitsverteilung

X: Anzahl der Kreise beim zufälligen Fadenknüpfen

k	1	2	3
P(X=k)	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$

Bemerkung

Es gilt für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von n diskreten Zufallsgrößen:

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = k_i) = 1$$

Graphische Wahrscheinlichkeitsverteilung – Histogramm

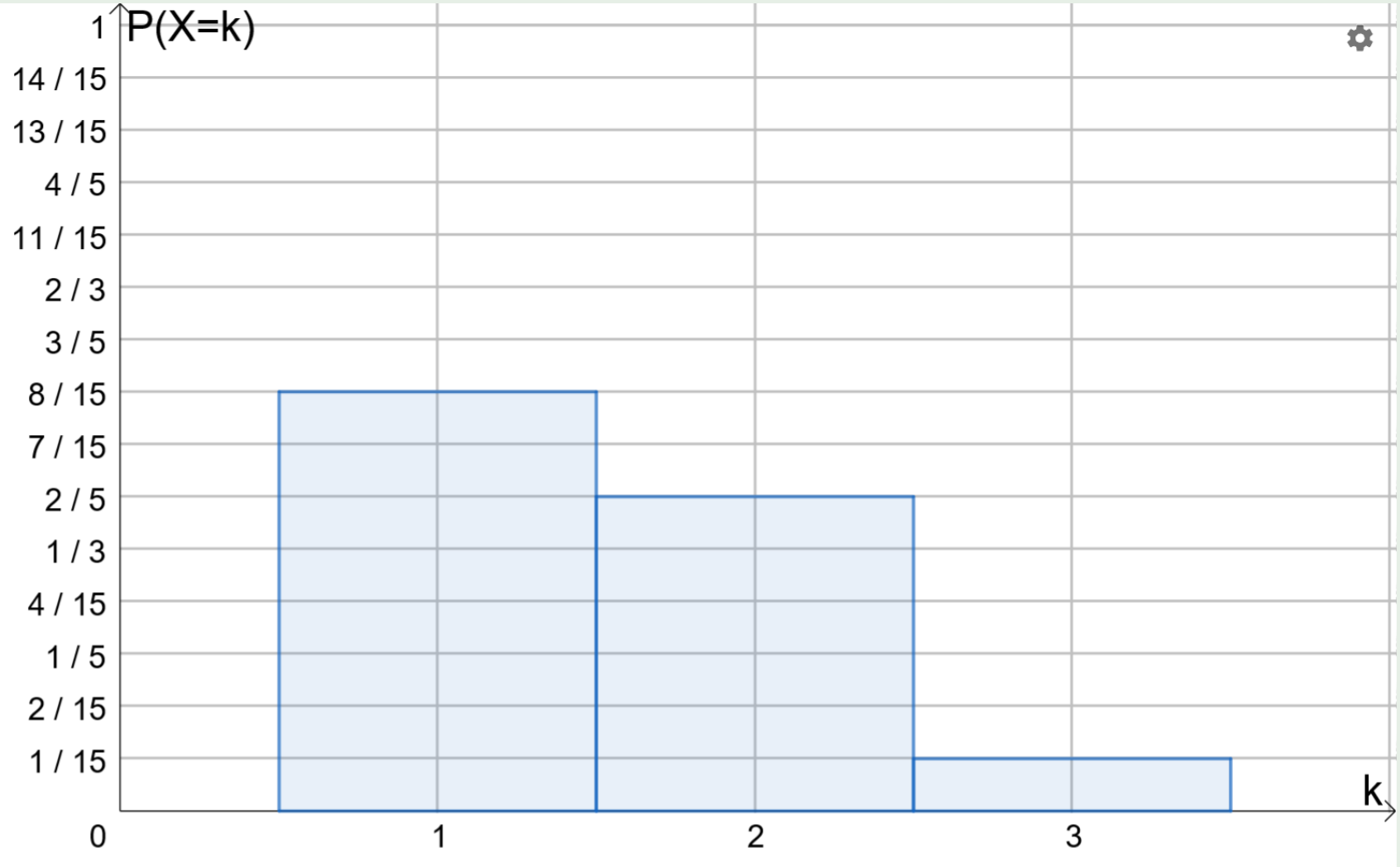


Abbildung: Wahrscheinlichkeitsverteilung [Geogebra HW, 2018]

Aufgaben A1

1. Begründen Sie, dass es sich nicht um die grafische Darstellung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt.

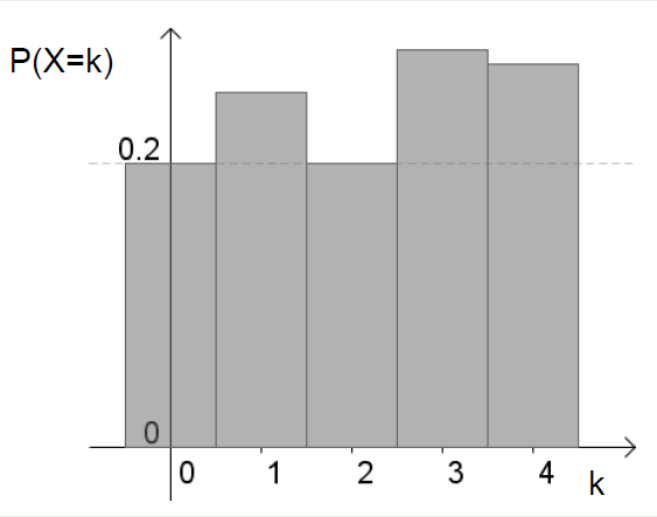


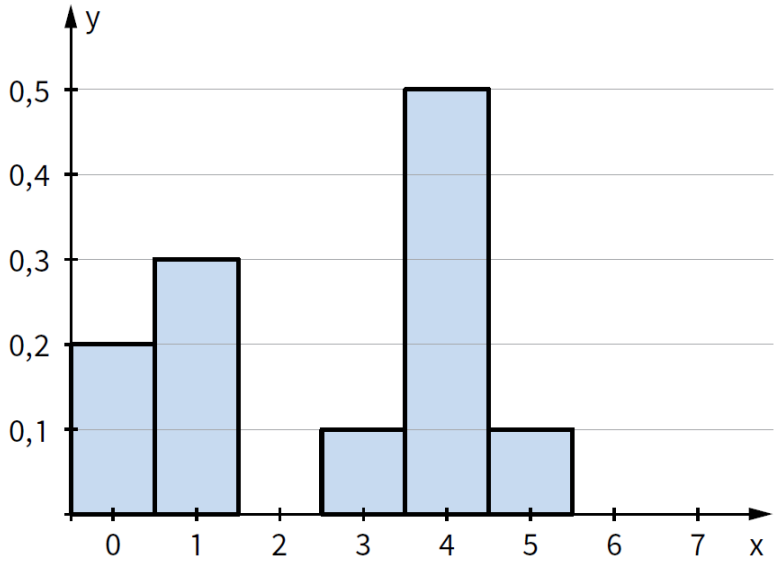
Abbildung: Abitur MV, hilfsmittelfrei, 2010

2. Gegeben ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X. Bestimmen Sie y.

k	-2	0	3	10
$P(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	y	$\frac{5}{18}$

Aufgabe A2

6. Im Mathematikunterricht hat Alexander zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Form von Histogrammen gezeichnet. Begründen Sie, warum jedes der Histogramme fehlerhaft ist.



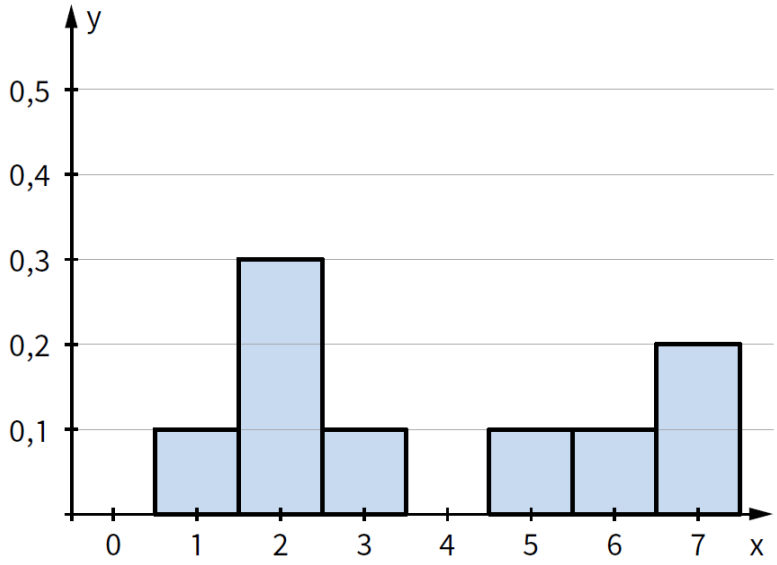


Abbildung: EdM 11 Sachsen, S. 280, HW

Sprech- und Schreibweisen

Sei die Zufallsgröße X: Alter von Personen in Jahren.

- $X = 18$
  Das Alter der Person ist 18 Jahre.
- $P(X = 18)$
  Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person 18 Jahre alt ist
- $P(X = 18) = \frac{2}{100}$
  Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person 18 Jahre alt ist, liegt bei 2%.

Interpretation von Intervallangaben

Formulierung	mathematische Übersetzung
„... *weniger als 42 ...*“	$P(X < 42) = P(X \leqq 41)$
„... *höchstens 42 ...*“	$P(X \leqq 42)$
„... *genau 42 ...*“	$P(X = 42)$
„... *mindestens 42 ...*“	$P(X \geqq 42)$
„... *mehr als 42 ...*“	$P(X > 42) = P(X \geqq 43)$
„... *zwischen 42 und 59...*“	$P(42 < X < 59) = P(43 \leqq X \leqq 58)$
„... *von 42 bis 59 ...*“	$P(42 \leqq X \leqq 59)$

Erwartungswert

Sei X eine Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung

k	k_1	k_2	$\dots$	k_n
$P(X=k)$	$P(X=k_1)$	$P(X=k_2)$	$\dots$	$P(X=k_n)$

Dann ist der zu erwartende Mittelwert

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P(X = k_i)$$

$$\mu = E(X) = k_1 \cdot P(X = k_1) + k_2 \cdot P(X = k_2) + \cdots + k_n \cdot P(X = k_n)$$

Dieser Wert heißt **Erwartungswert** von X.

Erläuterungen

Der Erwartungswert berechnet sich wie das arithmetische Mittel.

Ein Spiel (um Geld) wird als fair bezeichnet, wenn $E(X) = 0$ ist.

Erwartungswert für das Fadenknüpfen

X: Anzahl der Kreise beim zufälligen Fadenknüpfen

k	1	2	3
P(X=k)	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$\mu = E(X) = 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{6}{15} + 3 \cdot \frac{1}{15} = \frac{23}{15} = 1,5\overline{3}$$

Es ist also ein Kreis zu erwarten.

Der Erwartungswert wird bei ganzzahligen Ergebnissen stets abgerundet.

Aufgabe A3

Gegeben ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X.
Bestimmen Sie y und z, sodass $E(X) = 0$ gilt.

k	-6	0	3	9
$P(X = k)$	$\frac{1}{3}$	y	z	$\frac{1}{9}$

Standardabweichung

Sei X eine Zufallsgröße mit Erwartungswert μ und der Wahrscheinlichkeitsverteilung

k	k_1	k_2	$\dots$	k_n
$P(X=k)$	$P(X=k_1)$	$P(X=k_2)$	$\dots$	$P(X=k_n)$

Dann wird die Streuung um den Erwartungswert berechnet durch

$$\sigma(X) = \sqrt{(\mu - k_1)^2 \cdot P(X = k_1) + \cdots + (\mu - k_n)^2 \cdot P(X = k_n)}$$

Dieser Wert heißt **Standardabweichung** von X.

Bemerkung

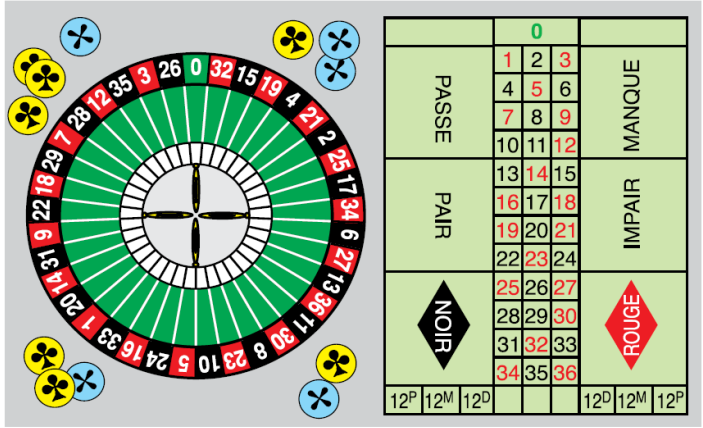
Der Wert unter der Wurzel heißt Varianz von X.

Beispiel – Roulette

Alle Wörter sind französisch:

roulette Rädchen
pair gerade ohne 0
impair ungerade
noir schwarz
rouge rot
manque niedrig, 1 bis 18
passe hoch, 19 bis 36
carré Quadrat
cheval Pferd
plein voll

6. Beim Roulette bleibt die Kugel in einem von 37 Fächern liegen. Arbeite bei den folgenden Aufgaben mit einem Einsatz von 10 €.



a) Berechne den Erwartungswert der Zufallsgrößen und beurteile, ob Roulette ein faires Spiel ist. Vergleiche außerdem die Erwartungswerte der Zufallsgrößen X, Y, Z und W.

(1) Die meisten Spieler setzen auf die sicheren Varianten pair, impair, noir, rouge, manque oder passe. Hier bekommt man den Einsatz doppelt zurück, wenn man gewinnt. Alle 6 Ereignisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit. X: *Gewinn/Verlust* bei pair.

(2) Manche Spieler setzen auf ein carré, das heißt auf vier in einem Quadrat liegende Nummern (zum Beispiel 13, 14, 16, 17). Hier bekommt man den Einsatz neunfach zurück. Y: *Gewinn/Verlust* bei carré.

(3) Es gibt auch Spieler, die auf cheval, das meint zwei benachbarte Zahlen setzen. Hier erhalten sie das 18-Fache ihres Einsatzes. Z: *Gewinn/Verlust* bei cheval.

(4) Ganz mutige Spieler setzen auf plein, das meint eine einzige Zahl. Der Gewinn hierbei ist das 36-Fache des Einsatzes. W: *Gewinn/Verlust* bei plein.

b) Berechne nun die Standardabweichung und beurteile, ob (1) im Vergleich zu carré, cheval und plein wirklich sicherer ist.

c) Untersuche, wie hoch der ausgezahlte Einsatz bei den einzelnen Ereignissen sein muss, damit das Spiel fair wird.

Abbildung: EdM Sachsen 10, S. 129, HW

Lösung Aufgabe

10 € Einsatz; Gewinn bei X: 10 €; Y: 80 €; Z: 170 €; W: 350 €

k	-10 €	10 €
$P(X=k)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

k	-10 €	80 €
$P(Y=k)$	$\frac{33}{37}$	$\frac{4}{37}$

k	-10 €	170 €
$P(Z=k)$	$\frac{35}{37}$	$\frac{2}{37}$

k	-10 €	350 €
$P(W=k)$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

$$E(X) = -10€ \cdot \frac{19}{37} + 10€ \cdot \frac{18}{37} = -\frac{10}{37}€$$

$$E(Y) = -10€ \cdot \frac{33}{37} + 80€ \cdot \frac{4}{37} = -\frac{10}{37}€$$

$$E(Z) = -10€ \cdot \frac{35}{37} + 170€ \cdot \frac{2}{37} = -\frac{10}{37}€$$

$$E(W) = -10€ \cdot \frac{36}{37} + 350€ \cdot \frac{1}{37} = -\frac{10}{37}€$$

Es ist also $E(X) = E(Y) = E(Z) = E(W)$

Es ist kein faires Spiel, da die Erwartungswerte nicht 0€ sind.

Lösung Aufgabe

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{19}{37} \cdot \left(-10€ - (-\frac{10}{37}€)\right)^2 + \frac{18}{37} \cdot \left(10€ - (-\frac{10}{37}€)\right)^2}$$

$\sigma(X) \approx 9,996€$

Analog erhält man

$\sigma(Y) \approx 27,947€$;

$\sigma(Z) \approx 40,702€$;

$\sigma(W) \approx 58,378€$

Also ist der Erwartungswert zwar gleich, aber das Spiel wird stets riskanter, je größer die Standardabweichung wird.

4. Stochastik

4.3 Binomialverteilte Zufallsgrößen

H. Wuschke

26. August 2020

Ziele der Sitzung

- Wahrscheinlichkeiten in der Binomialverteilung berechnen können
- Erwartungswert und Standardabweichung in der Binomialverteilung berechnen können
- Bedingungen für eine Binomialverteilung angeben
- Histogramme von Binomialverteilungen deuten können
- Sachsituationen interpretieren können

Beispiel 1

Es wird 10 Mal ein Laplace-Würfel geworfen. Dabei beschreibt die Zufallsgröße X: *Anzahl der 2*.

Berechnen Sie $P(X = 0)$.

$$P(X = 0) = P(\{\overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,1615$$

$P(X = 10) = \left(\frac{1}{6}\right)^{10}$ lässt sich auch noch gut berechnen. Alle Zufallsgrößen dazwischen sind jedoch sehr aufwändig zu berechnen. Beispielsweise ist

$$P(X = 1) = P(\{2\ \overline{2} \ldots \overline{2}\}) + P(\{\overline{2}\ 2\ \overline{2} \ldots \overline{2}\}) + \cdots + P(\{\overline{2} \ldots \overline{2}\ 2\})$$

$$P(X = 1) = 10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{9} \approx 0,323$$

Binomialverteilung

Lässt sich eine Zufallsgröße X durch ein Bernoulli-Experiment beschreiben, so vereinfacht sich die Berechnung der Zufallsgröße bei n Durchführungen für k Treffer mit Erfolgswahrscheinlichkeit p durch:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von diesen Zufallsexperimenten heißt **Binomialverteilung** $B_{n;p}$. Man spricht auch von einer **binomialverteilten Zufallsgröße**.

Berechnung im Rechner

Mit dem Rechner kann man diese Zufallsgrößen leicht berechnen durch den Befehl *binompdf(n,p,k)*.

Beispiel: $n = 20, p = \frac{2}{5}, k = 4,$ also $B_{20;\frac{2}{5}}$ und $P(X = 4)$

Im Rechner: *binompdf(20,*$\frac{2}{5}$*,4)* $\rightarrow$ $P(X = 4) \approx 0,035$

Bedingungen für eine Binomialverteilung

Damit eine diskrete Zufallsgröße als binomialverteilt angenommen werden kann, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Das Zufallsexperiment hat nur zwei Versuchsausgänge: Erfolg/Misserfolg; Gewinn/Niete; Treffer/kein Treffer; ...
- Die Wahrscheinlichkeit ändert sich nicht. (Ziehen mit Zurücklegen; Bei Befragungen sehr große Stichprobe; ...)

Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette

Ist eine Zufallsgröße binomialverteilt, wird das Zufallsexperiment auch als Bernoulli-Experiment bezeichnet. Mehrere Ereignisse eines Bernoulli-Experimentes heißen Bernoulli-Kette.
Diese Bezeichnung ist nach dem schweizer Mathematiker Jakob I. Bernoulli (1654–1705) benannt. Achtung, es gibt eine ganze Mathematikerfamilie, aus der Jakob I. Bernoulli stammt, daher ist der Nachname absolut nicht eindeutig.

Beispiel 1

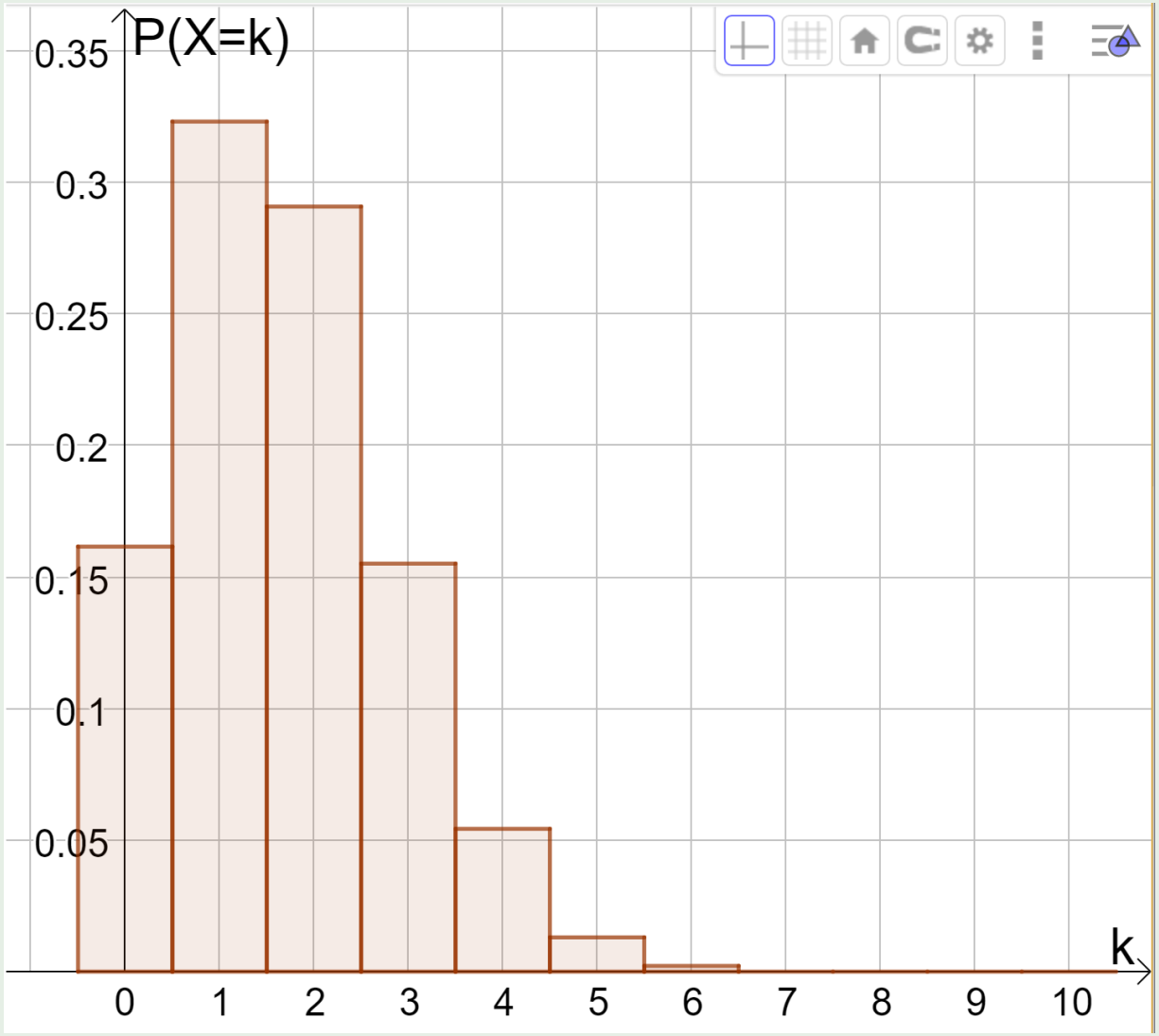


Abbildung: Binomialverteilung $B_{10;\frac{1}{6}}$, GeoGebra HW 2018

A1) Bernoulli-Versuche deuten

Bei einem Eignungstest werden Fragen angekreuzt, wobei nur eine Antwort jeweils richtig ist. Wenn jemand nicht gelernt hat kann dieser Versuch als Bernoulli-Kette aufgefasst werden.

Beschreiben Sie die Ereignisse, die zu folgenden Wahrscheinlichkeiten gehören:

$$P(A) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7$$

$$P(B) = \binom{20}{15} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{15} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$P(C) = \binom{50}{31} \cdot 0,5^{31} \cdot 0,5^{19}$$

kumulierte Wahrscheinlichkeit

Bildet man die Summe aus verschiedenen Wahrscheinlichkeiten, so spricht man von einer **kumulierten Wahrscheinlichkeit** (lat. *cumulus* = Anhäufung).

Symbolisch wird dies durch das Summenzeichen ausgedrückt mit Beginn bei a und Ende bei b:

$$P(a \leqq X \leqq b) = \sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Berechnung im Rechner

Mit dem Rechner kann man diese Zufallsgrößen leicht berechnen durch den Befehl *binomcdf*$(n, p, k_{Anfang}, k_{Ende})$.

Beispiel 1 – $B_{10;\frac{1}{6}}$

Rechenansätze für den schriftlichen Lösungsweg:

$$P(X \geqq 7) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$P(X \geqq 7) = \sum_{k=7}^{10} \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$

Im Rechner: *binomcdf(10,$\frac{1}{6}$,7,10)* $\quad \rightarrow \quad P(X \geqq 7) \approx 0,0003$

Rechenansätze für den schriftlichen Lösungsweg:

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X < 3) = \sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$

Im Rechner: *binomcdf(10,$\frac{1}{6}$,0,2)* $\quad \rightarrow \quad P(X < 3) \approx 0,7752$

Abituraufgaben

3.2 Der Seilpark „Luftige Höhe“ bietet Parcours in drei Schwierigkeitsstufen: 12 BE
leicht (L), mittel (M) und schwer (S).
Man weiß, dass etwa 22 % der Besucher S-Parcours klettern. In einer bestimmten Woche hat dieser Park 550 Besucher.

Begründen Sie, dass die Anzahl der S-Kletterer als binomialverteilt angenommen werden kann.

Berechnen Sie für folgende Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten:

(C) Genau 137 Besucher klettern S-Parcours.

(D) Höchstens ein Viertel der Besucher absolvieren S-Parcours.

Abbildung: Abitur M-V A3, 2017

3.2 In der täglichen Arbeit muss das Flüssigkeitsgemisch sehr oft hergestellt werden. Der Herstellungsprozess führt mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% zu einem brauchbaren Gemisch.

3.2.1 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei 20 Herstellungen des Flüssigkeitsgemisches

- genau 15
- höchstens 13
- mindestens 18

brauchbare Gemische entstehen.

Abbildung: Abitur M-V A3, 2014

Erwartungswert und Standardabweichung

Für binomialverteilte Zufallsgrößen berechnen sich der **Erwartungswert** und die **Standardabweichung** folgendermaßen:

$$\mu = n \cdot p \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Erwartungswert in einer Verteilung

Im Histogramm der Binomialverteilung ist der Erwartungswert (manchmal näherungsweise, manchmal exakt) immer bei der höchsten Säule zu finden.

Beispiel: $B_{10;\frac{1}{6}}$ ist $\mu = 10 \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \approx 1,6667 \qquad \sigma \approx 1,1785$

Abituraufgabe

1.4 Man weiß aus Erfahrung, dass bei der Produktion dieser Isoliergläser fehlerhafte Produkte mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 1,5 % auftreten. Eine Tagesproduktion umfasst 2000 Gläser.

1.4.1 Geben Sie den Erwartungswert an und berechnen Sie die Standardabweichung für die zufällige Anzahl fehlerhafter Gläser in einer Tagesproduktion.

Abbildung: Abitur M-V B1, 2016

Abituraufgaben

3.1 In Deutschland wurden 2012 ca. 2,4 Mio. Verkehrsunfälle von der Polizei aufgenommen, etwa bei 1,8 % der Unfälle stand mindestens ein Unfallbeteiligter unter dem Einfluss berauschender Mittel.

3.1.1 Berechnen Sie, bei wie vielen Unfällen mindestens ein Unfallbeteiligter unter dem Einfluss berauschender Mittel stand.

3.1.2 Betrachtet werden jetzt 500 zufällig ausgewählte Verkehrsunfälle. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Unfälle, bei denen mindestens ein Unfallbeteiligter unter dem Einfluss berauschender Mittel stand.

Begründen Sie, dass X als binomialverteilt angesehen werden kann und berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung dieser Zufallsgröße.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.

A: Genau bei 10 Unfällen gab es unter Rauschmitteleinfluss stehende Beteiligte.
B: Bei mehr als 10 Unfällen gab es unter Rauschmitteleinfluss stehende Beteiligte.
C: Kein Unfallbeteiligter stand unter dem Einfluss berauschender Mittel.

Abbildung: Abitur M-V A3, 2015

A2) Binomialverteilungen deuten

7. Die Grafiken zeigen Histogramme von Binomialverteilungen mit $n = 12$. Wie groß könnte p sein?

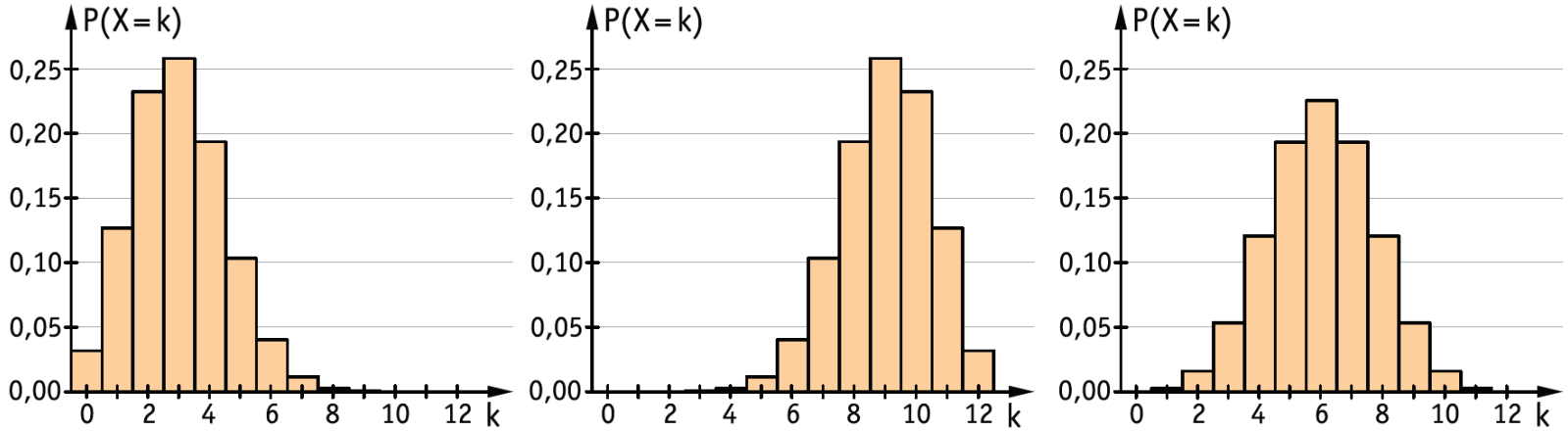


Abbildung: EdM 11 Sachsen, S. 305, HW

8. Die Grafiken zeigen Histogramme von Binomialverteilungen mit $p = 0{,}36$. Wie groß könnte n sein?

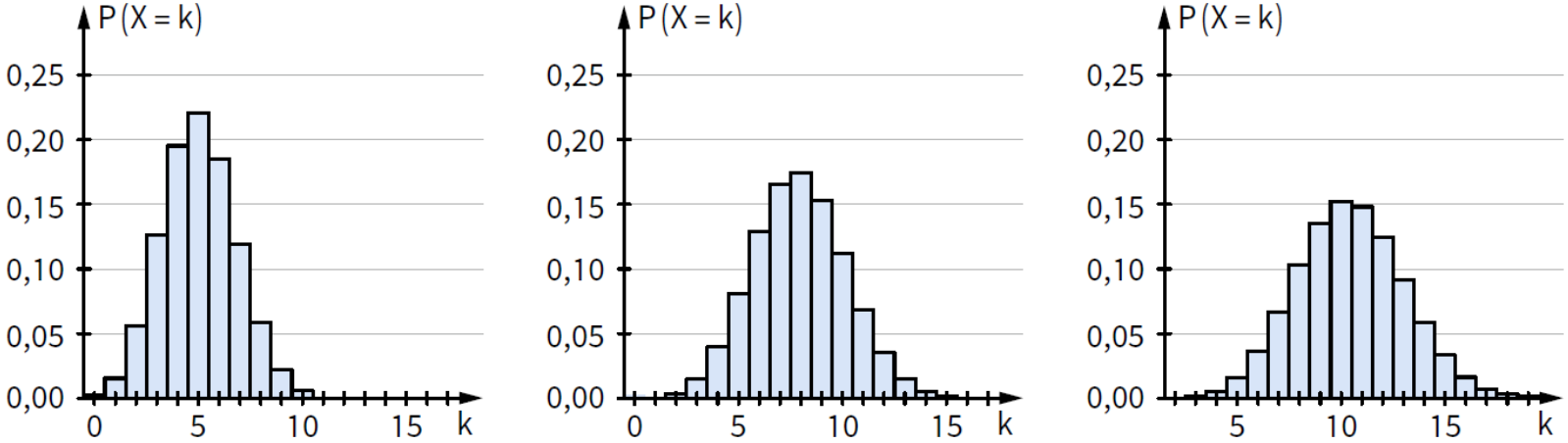


Abbildung: EdM Hessen Q3, S. 104

Sigma-Regeln, für $\sigma > 3$

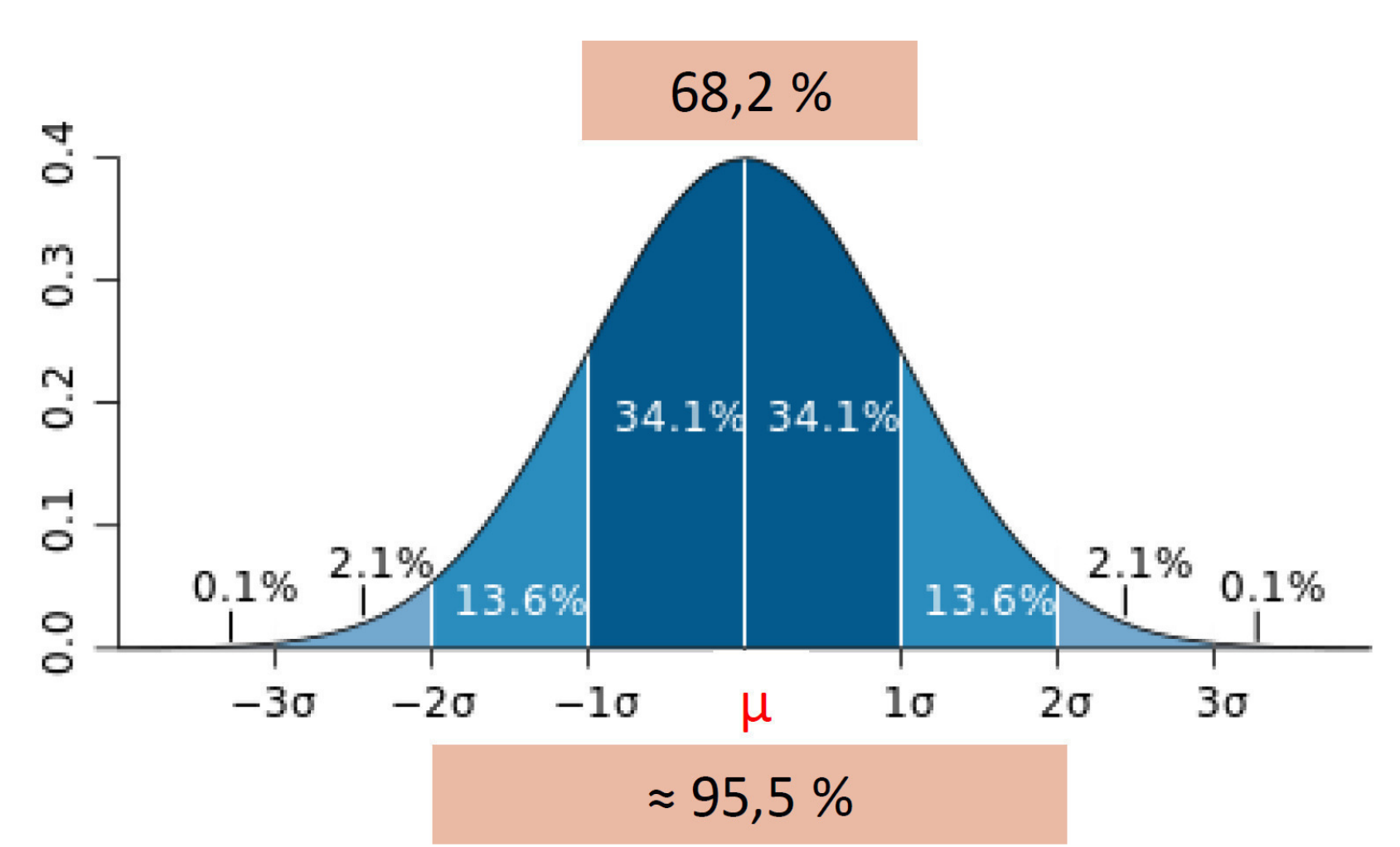


Abbildung: https://de.wikipedia.org/wiki/Normalverteilung#/media/File:Standard_deviation_diagram.svg

Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Erfolg

Abituraufgabe

3.2.2 Ermitteln Sie, wie viele Gemische mindestens hergestellt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,5% mit wenigstens einem unbrauchbaren Gemisch zu rechnen ist.

Abbildung: Abitur M-V A3, 2014

Wahrscheinlichkeit für unbrauchbar: $p = 0,2$ gesucht: n

$$P(X \geqq 1) > 0,995 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) > 0,995 \Leftrightarrow 0,005 > P(X = 0)$$

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{n-0} = 0,8^n$$

$$0,005 > 0,8^n \qquad \Rightarrow \qquad n > 23,744$$

Ab 24 Gemischen ist mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,5% mindestens ein unbrauchbares dabei.

Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Erfolge

Abituraufgabe

3.4.3 Berechnen Sie, wie viele Personen befragt werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80% mindestens zwei Kinder unter den Besuchern zu finden.

Abbildung: Abitur M-V A3, 2016

Wahrscheinlichkeit für Kinder: $p = 0,06$ gesucht: n

Verschiedene n probieren und $P(X \geqq 2)$ berechnen.

n	45	47	48	49
$P(X \geqq 2)$	0,761	0,782	0,792	0,801

Unter 49 Besuchern sind mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80% mindestens zwei Kinder.

4. Stochastik

4.4 Baumdiagramme und Vierfeldertafeln

H. Wuschke

09. September 2020

Ziele der Sitzung

- Baumdiagramme zeichnen können
- Aus einem Baumdiagramm eine Vierfeldertafel aufstellen
- Aus einer Vierfeldertafeln zwei Baumdiagramme aufstellen
- Ereignisse auf Abhängigkeit/Unabhängigkeit untersuchen können

Baumdiagramm

Zur Veranschaulichung von (mehrstufigen) Zufallsexperimenten kann ein **Baumdiagramm** genutzt werden. Die Zweige zeigen dabei die einzelnen Ergebnisse der jeweiligen Stufe an und die Pfade sind verschiedene Ereignisse.

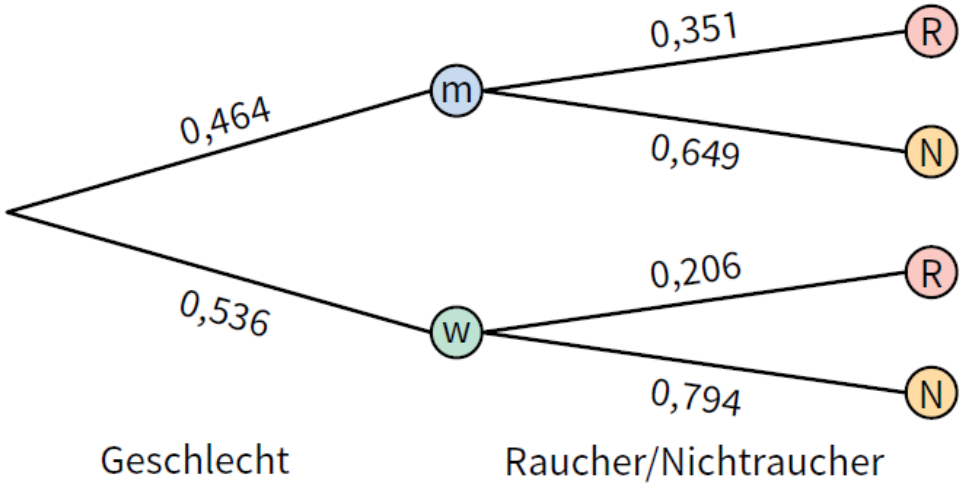


Abbildung: EdM Sachsen 11, S. 256, HW

Pfadregeln

1. Entlang des Pfades wird multipliziert.
2. Mehrere Pfade werden addiert.

Vierfeldertafel

Zwei Ereignisse können auch in einer **Vierfeldertafel** zusammengetragen werden.

	Ereignis A	Ereignis $\overline{A}$	gesamt
Ereignis B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
Ereignis $\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
gesamt	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Es gilt beispielsweise: $P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A)$.

Es heißt $A \cap B$ (A geschnitten B): A und B treten ein.

Bemerkung Vierfeldertafel/Kontingenztafel

In manchen Literaturquellen wird eine Vierfeldertafel ausschließlich für absolute Daten verwendet und eine Kontingenztafel für relative Zahlen bzw. Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel – Alkoholkonsum von 18- bis 25jährigen

Bei dem BZgA-Jahresbericht 2019[a] zum Thema „Alkoholkonsum Jugendlicher“ wurden Personen im Alter von 18 bis 25 Jahre befragt. Der Anteil der Frauen betrug 47,6%. Es gaben 34,0% der Personen an, dass sie regelmäßig Alkohol konsumieren. 23,6% der Teilnehmer sind männlich und trinken regelmäßig.

	männlich	weiblich	gesamt
trinken reglm.	23,6%	10,4%	34,0%
$\overline{\text{trinken reglm.}}$	28,8%	36,2%	66,0%
gesamt	52,4%	47,6%	1

[a] https://www.bzga.de/fileadmin/user_upload/PDF/studien/Alkoholsurvey_2018_Alkohol-Bericht.pdf

Aus einer Vierfeldertafel werden zwei Baumdiagramme

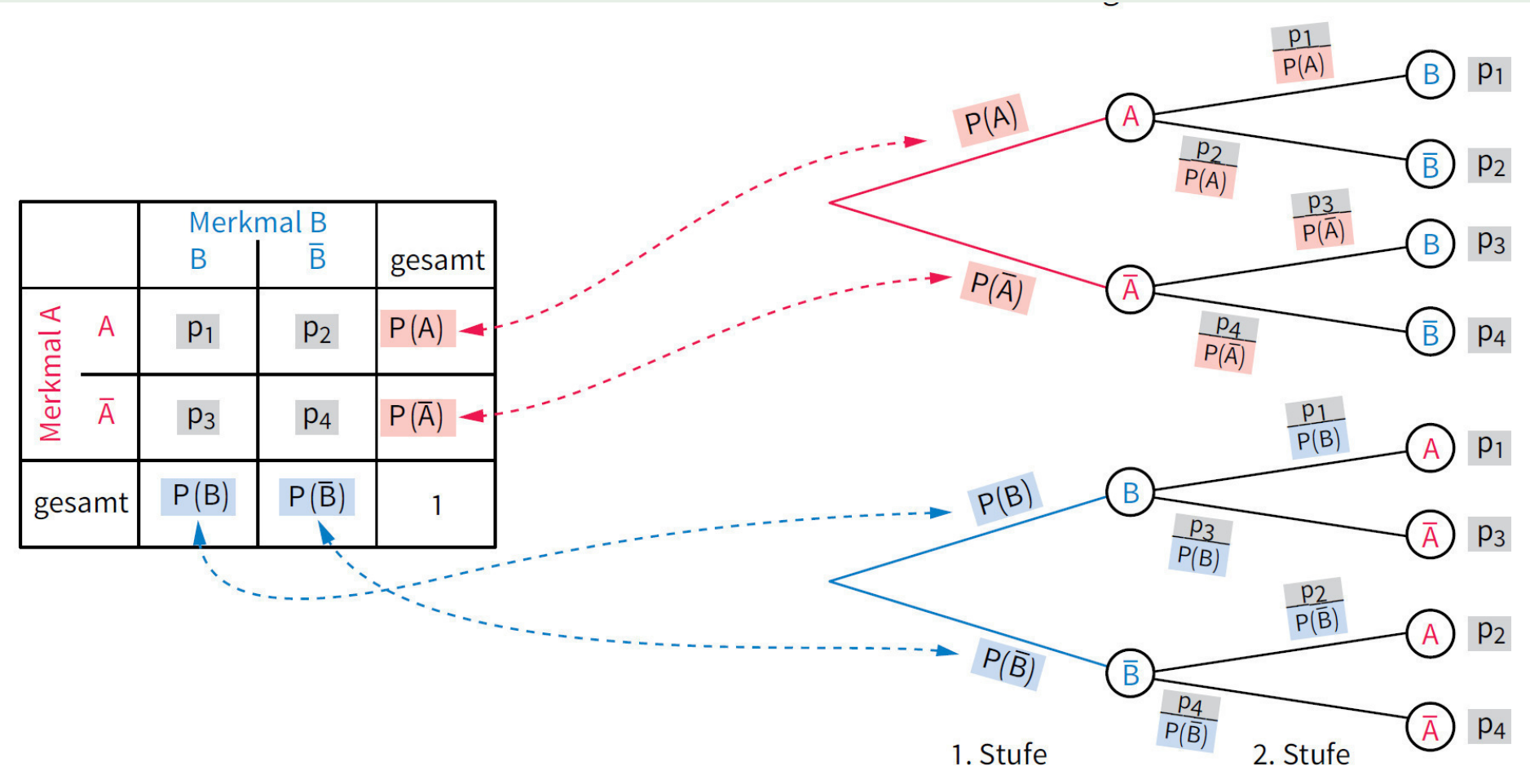


Abbildung: EdM Sachsen 11, S. 255, HW

Aus einem Baumdiagramm wird eine Vierfeldertafel

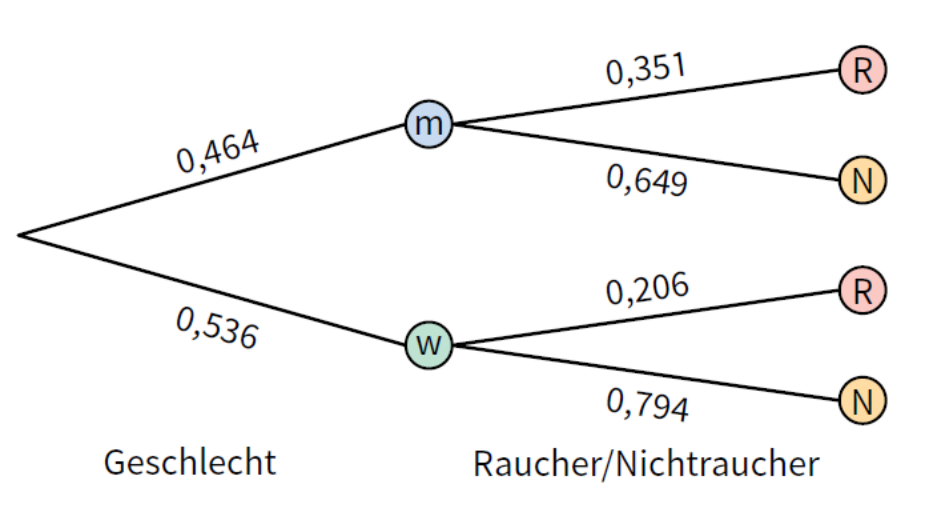


Abbildung: EdM Sachsen 11, S. 256, HW

Es ist $P(m \cap R) = 0,464 \cdot 0,351 = 0,162864 \approx 0,163$

$P(m \cap N) \approx 0,301$, $P(w \cap R) \approx 0,110$ und $P(w \cap N) \approx 0,426$

	m	w	gesamt
R	0,163	0,110	0,273
N	0,301	0,426	0,727
gesamt	0,464	0,536	1

Bei manchen Ereignissen gibt es Zusammenhänge, welche die Wahrscheinlichkeit beeinflussen.

Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Ereignissen

Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig**, wenn gilt: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$.
Dies erkennt man in der Vierfeldertafel, wenn in der Mitte die Produkte stehen und im Baumdiagramm, wenn die Äste der zweiten Stufe gleiche Wahrscheinlichkeiten haben (Abbildung).

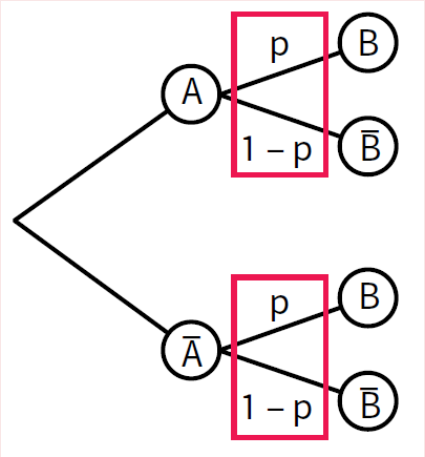


Abbildung: EdM Sachsen 11, S. 261, HW

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Sind zwei Ereignisse A und B nicht stochastisch unabhängig, so bedingen sie sich.

Dabei ist $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ die Wahrscheinlichkeit für B unter der Bedingung A

und $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ die Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung B.

Beispiel Raucher

In dem Beispiel über die männlichen und weiblichen Raucher ist beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann raucht ist ca. 35,1 % und die Wahrscheinlichkeit, dass eine rauchende Person männlich ist ca. 59,7 %, weil gilt:

$$P_m(R) = \frac{0,163}{0,464} \approx 0,351 \qquad P_R(m) = \frac{0,163}{0,273} \approx 0,597$$

Abituraufgabe Sachsen LK 2013, 1.5

Die Endstücke werden von der Firma mit zwei Maschinen produziert. Maschine A produziert 60% und Maschine B produziert 40% der Gesamtprouktion.
Erfahrungsgemäß sind 96% der von Maschine A produzierten Endstücke und 94% der von Maschine B produzierten Endstücke normgerecht.
Der Gesamtproduktion der Firma wird ein Endstück zufällig entnommen. Es ist nicht normgerecht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Endstück von der Maschine A produziert wurde.

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Für die Wahrscheinlichkeiten zweier beliebiger Ereignisse A und B gilt:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)$$

Bemerkung

Analog kann $P(\overline{A})$, $P(B)$ und $P(\overline{B})$ definiert werden. Dieser Satz ist maßgeblich für die Erstellung der Vierfeldertafel.

Satz von Bayes (1763, Thomas Bayes [1701–1761])

Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit folgt der Satz von Bayes:

$$P_A(B) = \frac{P(B) \cdot P_B(A)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)}$$