12ma2 neue friedländer gesamtschule
Mathematik Schuljahr 2020/21

Probeklausur zur „Abiturvorbereitung“

06. November 2020

Name: _____

Allgemeine Hinweise:

- Bearbeitungszeit: 180 Minuten (davon maximal 45 Minuten hilfsmittelfrei)
- Vor Bearbeitung des Rechnerteils muss der hilfsmittelfreie Teil abgegeben werden. Sie entscheiden selbst, wann dies der Fall ist, aber spätestens nach 45 Minuten.
- Nach Abgabe des hilfsmittelfreien Teils sind folgende Hilfsmittel für den Rechnerteil zugelassen: Tafelwerk; TI-App
- Gesamtpunktzahl: 55 BE
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Wenn nicht anders gekennzeichnet, können Ergebnisse nur dann als vollständig und richtig anerkannt werden, wenn alle Zwischenresultate nachvollziehbar und die mathematischen Schlussweisen begründet sind.
- Von den Aufgaben W1, W2 und W3 sind zwei Aufgaben obligatorisch.
- Durch Bearbeitung der dritten Aufgabe können bis zu 5 Zusatzpunkte erlangt werden.

K1	K2	K3	W1	W2	W3	$\sum$
5	5	5	20	20	20	55

Note:

Probeklausur III. Semester Mathematik (06.11.2020) – 12ma2

Aufgabe K1 – Analysis (2 + 3 BE)

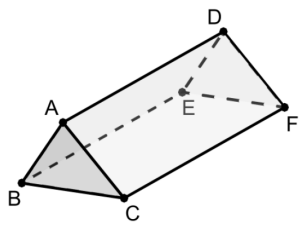
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x + 1$ und $x \in \mathbb{R}$

a) Bestimmen Sie die x-Koordinate der Punkte, in denen der Graph von f die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ schneidet.

b) Unter den Tangenten an den Graphen von f hat eine die kleinste Steigung. Bestimmen Sie die Steigung dieser Tangente.

Aufgabe K2 – Analytische Geometrie (2 + 3 BE)

Betrachtet wird das Pisma $ABCDEF$ mit $A(3|3|6)$, $B(-1|5|2)$, $C(7|4|1)$ und $E(2|23|8)$. A, B und C liegen in der Ebene $L : x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 33$.



a) Begründen Sie, dass das Prisma gerade ist.

b) Die Ebene M ist parallel zu L. und teilt das Prisma in zwei Teilkörper. Das Volumen des Teilkörpers, der den Punkt E enthält, ist doppelt so groß wie das Volumen des anderen Teilkörpers. Ermitteln Sie eine Gleichung von M.

Aufgabe K3 – Stochastik (2 + 3 BE)

Ein Glücksrad besteht aus einem blauen, einem gelben und einem roten Sektor. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Drehen „Rot“ erzielt wird, ist $\frac{1}{3}$.
Bei einem Spiel wird das Glücksrad zweimal gedreht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei zweimal „Gelb“ erzielt wird, beträgt $\frac{1}{4}$.

a) Ermitteln Sie für den gelben Sektor die Größe des Mittelpunktswinkels.

b) Beschreiben Sie im gegebenen Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term

$$\sum_{i=0}^{3} \binom{10}{i} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^i \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{10-i}$$

berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an.

W1 – Analysis (4 + 4 + 2 + 3 + 4 + 3 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{15}{2}x$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$.
Ein Ballon schwebt zu Beobachtungsbeginn in einer Höhe von 50 m. In den folgenden fünf Minuten lässt sich die Geschwindigkeit in vertikaler Richtung modellhaft mithilfe der Funktion f beschreiben. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten und $f(x)$ die Geschwindigkeit in vertikaler Richtung in 10 Meter pro Minute.

a) Zeichnen Sie die Geschwindigkeit des Ballons in vertikaler Richtung in Abhängigkeit von der Zeit. Markieren Sie den Zeitraum, in dem diese Geschwindigkeit größer als 30 Meter pro Minute ist.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Ballon ungefähr zum Zeitpunkt 1,2 Minuten nach Beobachtungsbeginn am schnellsten steigt und bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem er am schnellsten sinkt. Geben Sie für jeden der beiden Zeitpunkte die zugehörige Geschwindigkeit in vertikaler Richtung an.

c) Für eine der Nullstellen von f gilt $0 < x < 5$. Beschreiben Sie deren Bedeutung hinsichtlich der Höhe des Ballons.

d) Entscheiden Sie, ob die Höhe des Ballons fünf Minuten nach Beobachtungsbeginn größer ist als die Höhe zu Beobachtungsbeginn und begründen Sie Ihre Entscheidung mithilfe der Skizze aus Teilaufgabe a).

e) Begründen Sie, dass der Term $10 \cdot \int_0^x f(z)dz + 50$ für $0 \leqq x \leqq 5$ die Höhe des Ballons in Metern in Abhängigkeit von der Zeit angibt. Gehen Sie dabei auch auf die Bedeutung der Zahlen 10 und 50 ein.

f) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem der Ballon erstmalig seit Beobachtungsbeginn eine Höhe von 120 m erreicht.

W2 – Analytische Geometrie (3+2+2+3+2+3+5 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die gerade Pyramide $ABCDS$ mit $A(0|0|0)$, $B(5|0|0)$, $C(5|5|0)$ und $D(0|5|0)$ sowie der Spitze $S(2,5|2,5|3,9)$ gegeben.

3.1 Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein.

3.2 Begründen Sie ohne Verwendung von Vektoren, dass die Grundfläche der Pyramide ein Quadrat ist.

3.3 Bestimmen Sie den Inhalt der Seitenfläche der Pyramide.

3.4 Die Punkte A, B und S liegen in einer Ebene ε. Bestimmen Sie eine Gleichung von ε in Koordinatenform.

(*zur Kontrolle:* $\varepsilon : -39y + 25z = 0$)

3.5 Bestimmen Sie die Größe des Neigungswinkels einer Zeltwand gegenüber der Horizontalen.

3.6 Auf das Zelt treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell zu einem bestimmten Zeitpunkt durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 7,5 \\ -12,5 \\ -3,9 \end{pmatrix}$ beschreiben. Zu diesem Zeitpunkt trifft Sonnenlicht durch ein kleines Loch in einer Zeltwand genau auf den Eckpunkt des Zeltbodens, der durch den Punkt B beschrieben wird. Der Punkt $L(x_L|y_L|1,3)$ stellt das Loch in der Zeltwand dar. Bestimmen Sie die Werte von x_L und y_L.

3.7 Auf einem Teil des Zeltbodens hat ein 1,20m großes Kind die Möglichkeit, aufrecht zu stehen. Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells den Anteil des Flächeninhalts dieses Teils am Flächeninhalt des gesamten Zeltbodens. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen anhand einer geeignet beschrifteten Skizze.

W3 – Stochastik (2+3+2+3+2+4+4 BE)

Ein Hersteller bringt ein neues Smartphone auf den Markt.
1. Ein Händler erhält eine Lieferung dieser Smartphones

a) Die gelieferten Geräte haben sechs verschiedene Farben. Für die Auslage einiger Geräte im Schaufenster sollen vier Farben ausgewählt werden. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für diese Auswahl.

b) Die Lieferung umfasst 50 Geräte, davon sind drei fehlerhaft. Aus der Lieferung werden zehn Geräte zufällig ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: „Von den zehn ausgewählten Geräten ist keines fehlerhaft."

B: „Von den zehn ausgewählten Geräten ist mindestens eines fehlerhaft."

2. Die Geräte werden in vier Werken in jeweils großer Stückzahl hergestellt. Der Tabelle können für jedes Werk folgende Daten entnommen werden:

- der Anteil der in diesem Werk hergestellten Geräte an der Gesamtzahl aller hergestellten Geräte;
- der Anteil der fehlerhaften Geräte unter den in diesem Werk hergestellten Geräten.

Werk	A	B	C	D
Anteil der Gesamtzahl	10 %	30 %	20 %	40 %
Anteil der fehlerhaften Geräte	5 %	3 %	4 %	2 %

a) Weisen Sie nach, dass der Anteil der fehlerhaften Geräte unter allen hergestellten Geräten 3 % beträgt.

b) Ein unter allen hergestellten Geräten zufällig ausgewähltes Gerät ist fehlerhaft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es im Werk A hergestellt wurde.

c) Von im Werk A hergestellten Geräten werden 250 zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie die Anzahl fehlerhafter Geräte, die darunter mit der größten Wahrscheinlichkeit auftritt.

d) Geben Sie einen Wert von s an, für den mit dem Term $200 \cdot 0,98^s \cdot 0,02 + 0,98^{200}$ im Sachzusammenhang die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnet werden kann. Beschreiben Sie das zugehörige Ereignis.

e) Ermitteln Sie, wie viele im Werk C hergestellte Geräte mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 500 Geräte befinden, die nicht fehlerhaft sind.