5. Integralrechnung

5.5 Parameterfunktionen

H. Wuschke

06. Januar 2021

Ziele der Sitzung

- Funktionen mit der Produktregel ableiten
- Funktionen mit linearer Verkettung ableiten
- Anwendung des gelernten Wissens auf Parameterfunktionen

A1 Wiederholung Ableitung

Bilden Sie die gewünschten Ableitungen

a) $\frac{d}{dx}\left(3 \cdot x^4 - \frac{1}{12} \cdot x^2 + e^x - 3 \cdot \sin(x)\right)$

b) $\frac{d}{dt}\left(3 \cdot x^4 \cdot t^2 - \frac{1}{12} \cdot x^2 \cdot t + e^x - 3 \cdot \cos(t)\right)$

c) $\frac{d}{da}\left(5 \cdot a^2 \cdot b^3 - 13 \cdot a^3 \cdot b^2 + 8 \cdot a \cdot b - 6 \cdot a\right)$

d) $\frac{d}{db}\left(5 \cdot a^2 \cdot b^3 - 13 \cdot a^3 \cdot b^2 + 8 \cdot a \cdot b - 6 \cdot a\right)$

e) $\frac{d}{dc}\left(e^{3 \cdot x + c} + \sin(7c - 6x)\right)$

f) $\frac{d}{dx}\left(e^{3 \cdot x + c} + \sin(7c - 6x)\right)$

Produktregel

Seien $u(x)$ und $v(x)$ zwei differenzierbare Funktionen. So gilt:

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)\cdot v(x)\right) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Kurznotation der Produktregel

$$(u\cdot v)' = u'v + uv'$$

Beispiele

1. $\frac{d}{dx}\left(x^2\cdot e^x\right) = 2\cdot x\cdot e^x + x^2\cdot e^x$
2. $\frac{d}{dx}\left((x^3-2)\cdot\cos(x)\right) = 3x^2\cdot\cos(x) - (x^3-2)\cdot\sin(x)$

Ableitung mit linearer Verkettung

Für eine differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt:

$$\frac{d}{dx}\left(f(m \cdot x + n)\right) = m \cdot f'(m \cdot x + n)$$

Beispiele

1. $\frac{d}{dx}\left((8x - 1,5)^4\right) = 8 \cdot 4 \cdot (8x - 1,5)^3 = 32 \cdot (8x - 1,5)$
2. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{(5x-2)^7}\right) = 5 \cdot \frac{7}{3} \cdot \sqrt[3]{(5x-2)^4} = \frac{35}{3} \cdot \sqrt[3]{(5x-2)^4}$
3. $\frac{d}{dx}\left(e^{-3x+4}\right) = -3 \cdot e^{-3x+4}$
4. $\frac{d}{dx}\left(\cos(2-x)\right) = -1 \cdot \left(-\sin(2-x)\right) = \sin(2-x)$

Parameterfunktion

Eine Funktion $f_k(x)$ heißt **Parameterfunktion** mit der Variable x und dem Parameter k. Hierbei ist der Parameter $k \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl.

Beispiel

Gegeben ist die Funktionsvorschrift $g_t(x) = t^2 \cdot x^3 - t^4 \cdot x + 6$

$g_2(x) = 2^2 \cdot x^3 - 2^4 \cdot x + 6 = 4x^3 - 16x + 6$

$g_{-5}(x) = (-5)^2 \cdot x^3 - (-5)^4 \cdot x + 6 = 25x^3 - 625x + 6$

$g_0(x) = 0^2 \cdot x^3 - 0^4 \cdot x + 6 = 0 \cdot x^3 - 0 \cdot x + 6 = 6$

$g_1(x) = x^3 - x + 6$ und $g_{-1}(x) = x^3 - x + 6$

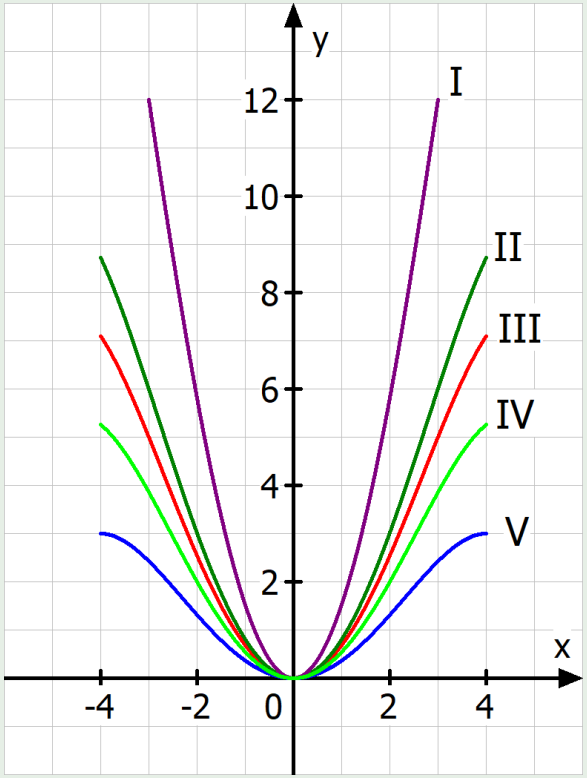
$g_t'(x) = 3 \cdot t^2 \cdot x^2 - t^4$ $\quad G_t(x) = \frac{1}{4} \cdot t^2 \cdot x^4 - \frac{1}{2} \cdot t^4 \cdot x^2 + 6x + c$

$g_t''(x) = 6 \cdot t^2 \cdot x$

$g_t'''(x) = 6 \cdot t^2$ Jede weitere Ableitung ist natürlich 0.

A2 Abitur 2017 B1 (Teil 1)

Die Abbildung zeigt Längsschnitte von fünf Gläsern einer Glas-Serie; Füße und Stiele der Gläser sind nicht abgebildet. [...] eine Längeneinheit entspricht 1 cm in der Wirklichkeit. Die Formen der Gläser sind so gewählt, dass jeder der fünf Längsschnitte modellhaft mithilfe einer der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit



$$f_k(x) = -\frac{3}{512}k\cdot x^4 + \frac{3}{32}k^2\cdot x^2 \qquad \text{und } k \in \mathbb{R}^+$$

beschrieben werden kann. Dabei gehört f_2 zum Likörglas der Serie, die Funktion f_3 zum Cocktailglas. Das Sektglas hat eine Höhe von 12 cm, sein Rand einen Durchmesser von 6 cm. Die Materialstärke der Gläser soll vernachlässigt werden.

a) Ordnen Sie dem Likörglas und dem Cocktailglas jeweils den zugehörigen Graphen aus der Abbildung zu.

A2 Abitur 2017 B1 (Teil 2)

$$f_k(x) = -\frac{3}{512}k \cdot x^4 + \frac{3}{32}k^2 \cdot x^2 \qquad \text{und } k \in \mathbb{R}^+$$

b) Bestimmen Sie für das Sektglas den zugehörigen Wert von k.

c) Begründen Sie, dass der Graph von f_k für jedes $k \in \mathbb{R}^+$ symmetrisch zur y-Achse ist.

d) Bestimmen Sie Lage und Art der Extremstellen von f_k.

e) Der Längsschnitt des Likörglases soll für $0 \leqq x \leqq 4$ mithilfe zweier in $\mathbb{R}$ definierter quadratischer Funktionen p_1 und p_2 beschrieben werden, die folgende Eigenschaften besitzen:

- Die Scheitelpunkt der Graphen von p_1 und p_2 sollen im Tiefpunkt bzw. im Hochpunkt des Graphen von f_2 liegen.
- Die Graphen von p_1 und p_2 sollen ohne Knick ineinander übergehen. Der Punkt, in dem die beiden Graphen ineinander übergehen, hat die gleiche x-Koordinate wie der Wendepunkt des Graphen von f_2.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen von p_1 und p_2.