4. Stochastik

4.4 Baumdiagramme und Vierfeldertafeln

H. Wuschke

09. September 2020

Ziele der Sitzung

- Baumdiagramme zeichnen können
- Aus einem Baumdiagramm eine Vierfeldertafel aufstellen
- Aus einer Vierfeldertafeln zwei Baumdiagramme aufstellen
- Ereignisse auf Abhängigkeit/Unabhängigkeit untersuchen können

Baumdiagramm

Zur Veranschaulichung von (mehrstufigen) Zufallsexperimenten kann ein **Baumdiagramm** genutzt werden. Die Zweige zeigen dabei die einzelnen Ergebnisse der jeweiligen Stufe an und die Pfade sind verschiedene Ereignisse.

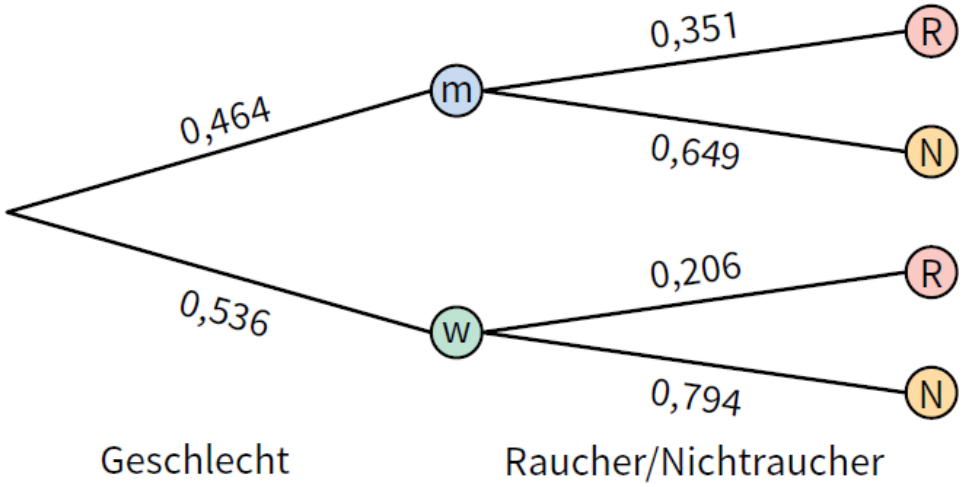

Abbildung: EdM Sachsen 11, S. 256, HW

Pfadregeln

1. Entlang des Pfades wird multipliziert.
2. Mehrere Pfade werden addiert.

Vierfeldertafel

Zwei Ereignisse können auch in einer **Vierfeldertafel** zusammengetragen werden.

	Ereignis A	Ereignis $\overline{A}$	gesamt
Ereignis B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
Ereignis $\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
gesamt	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Es gilt beispielsweise: $P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A)$.

Es heißt $A \cap B$ (A geschnitten B): A und B treten ein.

Bemerkung Vierfeldertafel/Kontingenztafel

In manchen Literaturquellen wird eine Vierfeldertafel ausschließlich für absolute Daten verwendet und eine Kontingenztafel für relative Zahlen bzw. Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel – Alkoholkonsum von 18- bis 25jährigen

Bei dem BZgA-Jahresbericht 2019[a] zum Thema „Alkoholkonsum Jugendlicher“ wurden Personen im Alter von 18 bis 25 Jahre befragt. Der Anteil der Frauen betrug 47,6%. Es gaben 34,0% der Personen an, dass sie regelmäßig Alkohol konsumieren. 23,6% der Teilnehmer sind männlich und trinken regelmäßig.

	männlich	weiblich	gesamt
trinken reglm.	23,6%	10,4%	34,0%
$\overline{\text{trinken reglm.}}$	28,8%	36,2%	66,0%
gesamt	52,4%	47,6%	1

[a] https://www.bzga.de/fileadmin/user_upload/PDF/studien/Alkoholsurvey_2018_Alkohol-Bericht.pdf

Aus einer Vierfeldertafel werden zwei Baumdiagramme

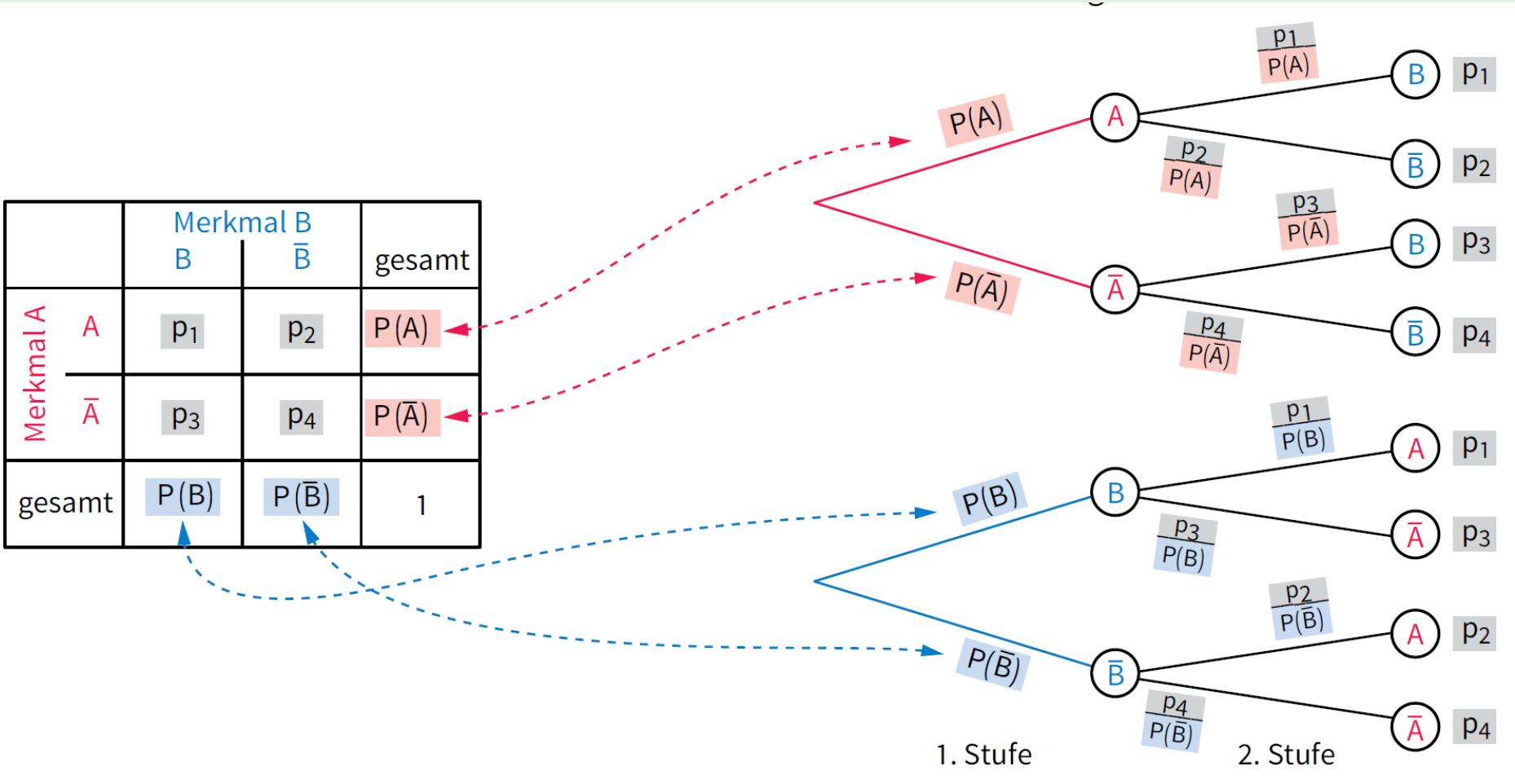

Abbildung: EdM Sachsen 11, S. 255, HW

Aus einem Baumdiagramm wird eine Vierfeldertafel

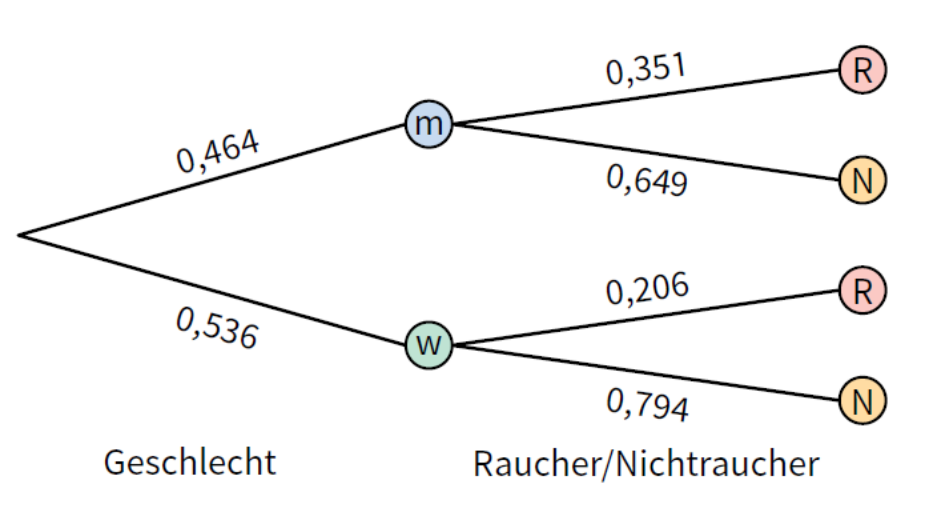

Abbildung: EdM Sachsen 11, S. 256, HW

Es ist $P(m \cap R) = 0,464 \cdot 0,351 = 0,162864 \approx 0,163$

$P(m \cap N) \approx 0,301$, $P(w \cap R) \approx 0,110$ und $P(w \cap N) \approx 0,426$

	m	w	gesamt
R	0,163	0,110	0,273
N	0,301	0,426	0,727
gesamt	0,464	0,536	1

Bei manchen Ereignissen gibt es Zusammenhänge, welche die Wahrscheinlichkeit beeinflussen.

Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Ereignissen

Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig**, wenn gilt: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$.
Dies erkennt man in der Vierfeldertafel, wenn in der Mitte die Produkte stehen und im Baumdiagramm, wenn die Äste der zweiten Stufe gleiche Wahrscheinlichkeiten haben (Abbildung).

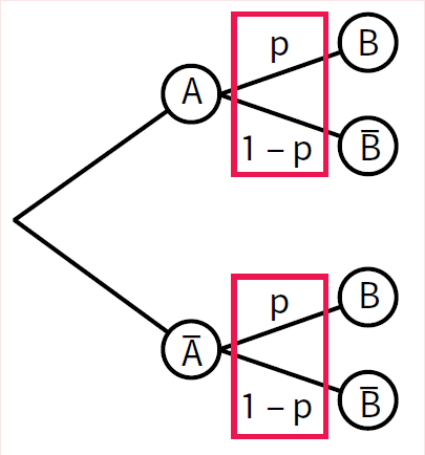

Abbildung: EdM Sachsen 11, S. 261, HW

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Sind zwei Ereignisse A und B nicht stochastisch unabhängig, so bedingen sie sich.

Dabei ist $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ die Wahrscheinlichkeit für B unter der Bedingung A

und $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ die Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung B.

Beispiel Raucher

In dem Beispiel über die männlichen und weiblichen Raucher ist beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann raucht ist ca. 35,1 % und die Wahrscheinlichkeit, dass eine rauchende Person männlich ist ca. 59,7 %, weil gilt:

$$P_m(R) = \frac{0,163}{0,464} \approx 0,351 \qquad P_R(m) = \frac{0,163}{0,273} \approx 0,597$$

Abituraufgabe Sachsen LK 2013, 1.5

Die Endstücke werden von der Firma mit zwei Maschinen produziert. Maschine A produziert 60% und Maschine B produziert 40% der Gesamtprouktion.
Erfahrungsgemäß sind 96% der von Maschine A produzierten Endstücke und 94% der von Maschine B produzierten Endstücke normgerecht.
Der Gesamtproduktion der Firma wird ein Endstück zufällig entnommen. Es ist nicht normgerecht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Endstück von der Maschine A produziert wurde.

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Für die Wahrscheinlichkeiten zweier beliebiger Ereignisse A und B gilt:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)$$

Bemerkung

Analog kann $P(\overline{A})$, $P(B)$ und $P(\overline{B})$ definiert werden. Dieser Satz ist maßgeblich für die Erstellung der Vierfeldertafel.

Satz von Bayes (1763, Thomas Bayes [1701–1761])

Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit folgt der Satz von Bayes:

$$P_A(B) = \frac{P(B) \cdot P_B(A)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)}$$