Parameterfunktionen (ohne CAS) (14.01.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (2 + 3 BE)

Durch die Gleichung $f_a(x) = (x^2 - a^2) \cdot e^{ax}$ wird für jede positive Zahl a eine Funktion f_a definiert.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f_a.

Da e^{ax} nie Null sein kann, egal was für a oder x eingesetzt wird, muss gelten:

$x^2 - a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -a$ und $x_2 = a$

b) Zeigen Sie, dass die positive Nullstelle von f_a niemals eine Extremstelle dieser Funktion sein kann.

$f_a'(x) = 2x \cdot e^{ax} + (x^2 - a^2) \cdot a \cdot e^{ax}$

Also ist $f_a'(a) = 2a \cdot e^{a^2} \neq 0$, weil a eine positive Zahl ist.

Aufgabe 2 (3 + 2 BE)

Gegeben ist die Parameterfunktion f_a mit $f_a(x) = x \cdot e^{x+a}$. Dabei sei a eine positive Zahl.

a) Leiten Sie die Gleichung derjenigen Funktion f_a der Schar her, deren Graph durch den Punkt $(-2|-2)$ verläuft.

$f_a(-2) = -2$ gilt aufgrund des Punktes, also ist:

$-2 \cdot e^{-2+a} = -2 \quad \overset{:(-2)}{\Rightarrow} \quad e^{-2+a} = 1$

Es gilt für jede reelle Zahl: $a^0 = 1$, also muss im Exponenten eine Null herauskommen. Daher ist $a = 2$.

Nun soll $f_2(x) = x \cdot e^{x+2}$ abgeleitet werden. Es ist $f_2'(x) = e^{x+2} + x \cdot e^{x+2} = (1+x) \cdot e^{x+2}$.

b) Weisen Sie nach, dass jede Funktion der Schar einen Graphen mit einem Tiefpunkt besitzt.

Es ist $f_a'(x) = e^{x+a} + x \cdot e^{x+a} = (1+x) \cdot e^{x+a}$

$0 = (1+x) \cdot e^{x+a} \quad \Rightarrow \quad x = -1.$

Zur Bestimmung der Art des Extremums muss $x = -1$ nun in die zweite Ableitung eingesetzt werden. Es ist:

$f_a''(x) = e^{x+a} + (1+x) \cdot e^{x+a} \quad \Rightarrow \quad f_a''(-1) = e^{-1+a} > 0$, also ist die Extremstelle immer ein lokales Minimum.

Aufgabe 3 (2 + 3 BE)

Für jede reelle Zahl t ist eine Funktion f_t durch $f_t(x) = x^3 - 2tx^2 + t^2x$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Wendestelle des Graphen von f_t.

$f_t'(x) = 3x^2 - 4tx + t^2$
$f_t''(x) = 6x - 4t$
$f_t'''(x) = 6$

Wendestelle bestimmen: $0 = 6x - 4t \quad \Leftrightarrow \quad 4t = 6x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}t$ (ist Wendestelle, weil $f_t'''\left(\frac{2}{3}t\right) = 6 \neq 0$ ist.

b) Untersuchen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_t in Abhängigkeit von t.

$f_t(x) = x \cdot (x^2 - 2tx + t^2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

Für x_2 und x_3 ist $0 = x^2 - 2tx + t^2$ mit der p-q-Formel zu lösen.

$x_{2/3} = t \pm \sqrt{t^2 - t^2} = t$

Also hat $f_t(x)$ nur eine Nullstelle, wenn $t = 0$ ist und sonst zwei Nullstellen.

Bemerkung: Das hätte man auch sehen können, wenn man binomische Formeln kann: $x \cdot (x^2 - 2tx + t^2) = x \cdot (x - t)^2$

Aufgabe 4 (2 + 3 BE)

Für jedes positive reelle a ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = e^{a \cdot x^2} - e^a; \quad x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes $P_a\,(1 \mid f_a(1))$.

$f_a(1) = e^{a \cdot 1^2} - e^a = e^a - e^a = 0$, also $P_a(1|0)$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t_a an den Graphen der Funktion f_a im Punkt P_a.

$f_a'(x) = 2x \cdot e^{a \cdot x^2}$

$f_a'(1) = 2 \cdot e^a$

$y = m \cdot x + n \quad \Rightarrow \quad 0 = 2 \cdot e^a \cdot 1 + n \quad \Leftrightarrow \quad n = -2 \cdot e^a$

$t_{P_a}(x) = 2 \cdot e^a \cdot x - 2 \cdot e^a = 2 \cdot e^a \cdot (x - 1)$

Aufgabe 5 (2 + 3 BE)

Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = a \cdot x^6 - x^4; \quad x \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die f_a mehr als eine Nullstelle hat.

$f_a(x) = a \cdot x^6 - x^4 = x^4 \cdot (a \cdot x^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad$ eine Nullstelle ist also daher $x_1 = 0$.

$0 = a \cdot x^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = a \cdot x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} = x^2$

$\Rightarrow \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{a}}$ und $x_3 = \sqrt{\frac{1}{a}}$

Für $a < 0$ sind beide Wurzeln undefiniert und dann hätte $f_a(x)$ nur die Nullstelle $x_1 = 0$. Daher hat $f_a(x)$ mehr als eine Nullstelle für $a > 0$.

b) Für genau einen Wert von a hat f_a an der Stelle $x = 1$ ein Minimum.
Bestimmen Sie diesen Wert von a.

$f_a'(x) = 6ax^5 - 4x^3$
$f_a''(x) = 30ax^4 - 12x^2$

$0 = 6ax^5 - 4x^3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 2x^3 \cdot (3ax^2 - 2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

$0 = 3ax^2 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3a} = x^2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3a}}$ und $x_3 = \sqrt{\frac{2}{3a}}$

Es muss also gelten $\frac{2}{3a} = 1$. Wenn man den Bruch umschreibt, steht dort $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a} = 1$. Damit das gilt, muss $a = \frac{2}{3}$ sein, denn $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$.