Parameterfunktionen (06.01.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (14 BE) – ohne CAS

Leiten Sie die gegebenen Funktionen zweimal nach der Variable ab, die in der Funktionsgleichung steht.

a) $f(x) = (5x^2 - 7x + 3) \cdot (8x^4 - 12x^3 + 3x^2 - 4)$

$f'(x) = (10x - 7) \cdot (8x^4 - 12x^3 + 3x^2 - 4) + (5x^2 - 7x + 3) \cdot (32x^3 - 36x^2 + 6x)$
$f''(x) = 10 \cdot (8x^4 - 12x^3 + 3x^2 - 4) + (10x - 7) \cdot (32x^3 - 36x^2 + 6x) + (10x - 7) \cdot (32x^3 - 36x^2 + 6x) + (5x^2 - 7x + 3) \cdot (96x^2 - 72x + 6)$

(Bemerkung: *Das könnte man auch ausmultiplizieren, aber kein Mensch hat Lust darauf.*)

b) $f(x) = \sin(3x + 5) \cdot x^3$

$f'(x) = 3 \cdot \cos(3x + 5) \cdot x^3 + 3 \cdot \sin(3x + 5) \cdot x^2$
$f''(x) = -9 \cdot \sin(3x + 5) \cdot x^3 + 9 \cdot \cos(3x + 5) \cdot x^2 + 9 \cdot \cos(3x + 5) \cdot x^2 + 6 \cdot \sin(3x + 5) \cdot x$

c) $f(x) = e^{5x} \cdot 3 \cdot x^4$

$f'(x) = 15 \cdot e^{5x} \cdot x^4 + 12 \cdot e^{5x} \cdot x^3 = 3 \cdot e^{5x} \cdot (5x^4 + 4x^3)$

$f''(x) = 15 \cdot e^{5x} \cdot (5x^4 + 4x^3) + 3 \cdot e^{5x} \cdot (20x^3 + 12x^2) = 3 \cdot e^{5x} \cdot (25x^4 + 40x^3 + 12x^2)$

d) $f(x) = 7 \cdot \sqrt[5]{(12x - 3)^{10}} = 7 \cdot (12x - 3)^2$

$f'(x) = 14 \cdot 12 \cdot (12x - 3) = 168 \cdot (12x - 3)$
$f''(x) = 168 \cdot 12 = 2016$

e) $f(a) = 3a^4b^7c^5 - e^{3a-4b+2c}$

$f'(a) = 12a^3b^7c^5 - 3 \cdot e^{3a-4b+2c}$

$f''(a) = 36a^2b^7c^5 - 9 \cdot e^{3a-4b+2c}$

f) $f(b) = 3a^4b^7c^5 - e^{3a-4b+2c}$

$f'(b) = 21a^4b^6c^5 + 4 \cdot e^{3a-4b+2c}$

$f''(b) = 126a^4b^5c^5 - 16 \cdot e^{3a-4b+2c}$

g) $f(c) = 3a^4b^7c^5 - e^{3a-4b+2c}$

$f'(c) = 15a^4b^7c^4 - 2 \cdot e^{3a-4b+2c}$

$f''(c) = 60a^4b^7c^3 - 4 \cdot e^{3a-4b+2c}$

Aufgabe 2 (2 + 1 + 2 + 6 + 2 + 3 + 3 BE)

Gegeben ist die Parameterfunktion $g_r(x) = \frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 - 2 \cdot x$ mit $r \in \mathbb{R}; r \neq 0$

a) Weisen Sie nach, dass $g_r(x)$ punktsymmetrisch ist.

$g_r(x) = \frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 - 2 \cdot x$

$g_r(-x) = \frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot (-x)^3 - 2 \cdot (-x) = -\frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 + 2x$

$-g_r(x) = -\left(\frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 - 2 \cdot x\right) = -\frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 + 2 \cdot x$

Da $g_r(-x) = -g_r(x)$ gilt, ist der Graph von $g_r(x)$ punktsymmetrisch.

b) Geben Sie die Nullstellen von $g_2(x)$ an.

$g_2(x) = \frac{12}{10}x^3 - 2x$. Die Nullstellen sind: $x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{5}{3}}$

c) Bestimmen Sie, für welches $r > 0$ die Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 3$ sind.

Für die Nullstelen gilt: $0 = \frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 - 2x \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{2\cdot\sqrt{15}}{3r}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{2\cdot\sqrt{15}}{3r}$

Da $x_2 = 0$ stets erfüllt ist und $g_r(x)$ nach Aufgabe a) punktsymmetrisch ist, genügt es, den Parameter r mithilfe der Gleichung

$$3 = \frac{2 \cdot \sqrt{15}}{3r}$$

zu bestimmen. Es folgt somit: $r = \frac{2\cdot\sqrt{15}}{9}$

d) Berechnen Sie die Extrempunkte (mit Art) in Abhängigkeit von r und den Wendepunkt von $g_r(x)$.

$g_r'(x) = \frac{9}{10} \cdot r^2 \cdot x^2 - 2 \qquad g_r''(x) = \frac{9}{5} \cdot r^2 \cdot x \qquad g_r'''(x) = \frac{9}{5} \cdot r^2$

Extremstellen (notwendige Bedingung):

$0 = g_r'(x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r}$, $x_2 = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r}$

Extremstellen (Art):

$g_r''\left(-\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r}\right) = -\frac{6\cdot\sqrt{5}\cdot r}{5} < 0 \quad \rightarrow \quad$ lokales Maximum bei $x_{\max} = -\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r}$

$g_r''\left(\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r}\right) = \frac{6\cdot\sqrt{5}\cdot r}{5} > 0 \quad \rightarrow \quad$ lokales Minimum bei $x_{\min} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r}$

Extrempunkte:

$g_r\left(-\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r}\right) = \frac{8\cdot\sqrt{5}}{9r} \quad \Rightarrow \quad H\left(-\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r} \mid \frac{8\cdot\sqrt{5}}{9r}\right)$

$g_r\left(\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r}\right) = -\frac{8\cdot\sqrt{5}}{9r} \quad \Rightarrow \quad T\left(\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r} \mid -\frac{8\cdot\sqrt{5}}{9r}\right)$

Wendestelle (notwendige Bedingung):

$0 = g_r''(x) \quad \Rightarrow \quad x = 0$

Überprüfung Wendestelle:

$g_r'''(0) = \frac{9}{5} \cdot r^2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ Wendestelle bei $x_W = 0$

Wendepunkt:

$g_r(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(0|0)$

e) Bestimmen Sie, für welches $r > 0$ der Hochpunkt die Koordinaten $H\left(-\frac{2}{15} \mid \frac{8}{45}\right)$ besitzt.

$-\frac{2}{15} = -\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r} \quad \Rightarrow \quad r = 5 \cdot \sqrt{5}$

f) Weisen Sie nach, dass $g_r(x)$ im zweiten Quadranten eine Fläche von $\frac{10}{3\cdot r^2}$ FE vollständig begrenzt.

Gesucht ist also die Fläche zwischen der ersten und der zweiten Nullstelle. Diese liegt im II. Quadranten und somit im positiven Bereich. Daher gilt für die Berechnung dieser vollständigen Fläche:

$$\int_{-\frac{2\cdot\sqrt{15}}{3\cdot r}}^{0} g_r(x)\ dx = \frac{10}{3 \cdot r^2}$$

Also ist die vollständig begrenzte Fläche $\frac{10}{3 \cdot r^2}$ FE groß.

g) Bestimmen Sie $r > 0$ so, dass die vollständig begrenzte Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse 6.000 FE beträgt.

Die vollständige Fläche besteht einerseits aus der Fläche zwischen der ersten und zweiten Nullstelle (in f) berechnet) und der Fläche zwischen der zweiten und dritten Nullstelle. Da die Funktion punktsymmetrisch ist (Aufgabe a)), sind beide Flächen gleich groß. Also kann auch nur die erste Teilfläche genutzt werden und diese muss dementsprechend 3.000 FE groß sein. Demzufolge bestimmt man das r durch:

$$\frac{10}{3 \cdot r^2} = 3000 \quad r_1 = -\frac{1}{30} \text{ (entfällt, da } r > 0\text{)} \ , \ r_2 = \frac{1}{30}$$

Daher ist $r = \frac{1}{30}$.