Aufgaben zur Binomialverteilung (26.08.2020)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (8 BE)

2014 brach die Ebolafieber-Epidemie in den westafrikanischen Ländern (Guinea, Liberia, Sierra Leone, Nigeria, Senegal und Mali) aus. Dabei hat die Untersuchung und Dokumentation des klinischen Verlaufs ergeben, dass nach Ausbruch der Epidemie 70,8% der Betroffenen gestorben sind.[1]

a) Begründen Sie, warum dies 2014 als binomialverteiltes Zufallsexperiment mit Zufallsgröße X: *Anzahl der infizierten Personen, die an Ebola sterben*, betrachtet werden konnte. (2 BE)

Es gibt nur zwei Ergebnisse: Die Person stirbt an Ebola und die Person stirbt nicht an Ebola. Außerdem verändert sich die Wahrscheinlichkeit nicht, da es noch kein Heilmittel zu dem Zeitpunkt gab und daher die Krankheit kaum bekämpft werden konnte.

b) Eine Hilfsorganisation kümmert sich um 1.000 infizierte Personen. Berechnen Sie, wie viele Tote zu erwarten sind. (1 BE)

$B_{1.000;0,708}$ – Begründung siehe Aufgabe a). $\mu = 1.000 \cdot 0,708 = 708$
Es sind 708 Tote bei 1.000 Infizierten zu erwarten.

c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse an (3 BE):

A: 700 bis 720 infizierte Personen erliegen der Krankheit.

$P(A) = P(700 \leqq X \leqq 720) \approx 0,5312$

B: Mehr als 680 infizierte Personen sterben.

$P(B) = P(X > 680) \approx 0,9713$

C: Weniger als 250 infizierte Personen überleben.

$B_{1.000;0,292}$ mit Zufallsgröße Y: *Anzahl der infizierten Personen, die Ebola überleben*
$P(C) = P(Y < 250) = P(X > 750) \approx 0,0014$

d) Bestimmen Sie eine Mindest- und eine Höchstanzahl der Toten, sodass 99% aller erwartbaren Fälle erfasst sind. (2 BE)
Hinweis: Schauen Sie in gleichen Abständen links und rechts vom Erwartungswert nach kumulierten Wahrscheinlichkeiten, bis Sie das erste Mal auf 0,99 kommen.

Der Erwartungswert ist $\mu = 708$. Nun folgt eine Lösung durch systematisches Probieren.

Dafür wird ein beliebiger Abstand links und rechts von μ genutzt: $P(\mu - 8 \leqq X \leqq \mu + 8) = P(700 \leqq X \leqq 716) \approx 0,4456$, also sind 44,56% der Fälle damit erfasst.

$P(\mu - 20 \leqq X \leqq \mu + 20) = P(688 \leqq X \leqq 728) \approx 0,8461$, also 84,61 % der Fälle.

$P(\mu - 30 \leqq X \leqq \mu + 30) = P(678 \leqq X \leqq 738) \approx 0,9662$, also 96,62 % der Fälle.

$P(\mu - 36 \leqq X \leqq \mu + 36) = P(672 \leqq X \leqq 744) \approx 0,9889$, also 98,89 % der Fälle.

$P(\mu - 37 \leqq X \leqq \mu + 37) = P(671 \leqq X \leqq 745) \approx 0,9909$, also 99,09 % der Fälle.

$\rightarrow$ Es ist zu 99 % mit 671 bis 745 Toten zu rechnen.

[1] https://www.nejm.org/doi/full/10.1056/NEJMoa1411100

Aufgabe 2 (2 + 1 + 3 = 6 BE)

3.3.1 **Es ist bekannt, dass bei der Produktion von Kondensatoren 7 % fehlerhaft sind.**
Der laufenden Produktion werden zufällig 500 Kondensatoren entnommen und auf Funktionstüchtigkeit überprüft.

Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment als Bernoulli-Experiment betrachtet werden darf.

Berechnen Sie die Anzahl der defekten Kondensatoren, die zu erwarten ist.

Berechnen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit.
A: Genau 30 Kondensatoren sind defekt.
B: Höchstens 40 Kondensatoren sind defekt.
C: Die Anzahl der Kondensatoren ohne Fehler ist größer als 460 aber kleiner als 470.

Abbildung 1: Abitur M-V A3, 2013

$B_{500;0,07}$ kann angenommen werden, weil es fehlerhafte und nicht fehlerhafte Kondensatoren sind und außerdem ändert sich die Wahrscheinlichkeit nicht, da es sich um einen bekannten Anteil aus einer Produktion handelt.

$\mu = 500 \cdot 0,07 = 35$. Es sind 35 fehlerhafte Kondensatoren zu erwarten.

Sei die Zufallsgröße X: *Anzahl der fehlerhaften Kondensatoren*:
$P(A) = P(X = 30) \approx 0,0501$ $\qquad$ $P(B) = P(X \leqq 40) \approx 0,8331$

$B_{500;0,93}$ und Y: *Anzahl der Kondensatoren ohne Fehler*
$\rightarrow \quad P(C) = P(460 < Y < 470) \approx 0,5698$ $\quad$ Mit X wäre es $P(30 < X < 40) \approx 0,5698$

Aufgabe 3 (6 BE)

6% aller Deutschen haben die Blutgruppe 0-, welche für alle Empfänger verträglich ist.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Spender, die benötigt werden, um mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Spender mit Blutgruppe 0- zu haben. (2 BE)

$P(X \geqq 1) \geqq 0,95$

Rechnerische Lösung: $P(X \geqq 1) \geqq 0,95 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geqq 0,95 \Leftrightarrow 0,05 \geqq P(X = 0)$
$\Leftrightarrow 0,05 \geqq \binom{n}{0} \cdot 0,06^0 \cdot 0,94^n \Leftrightarrow 0,05 \leqq 0,94^n \rightarrow n \geqq 48,4$

Systematisches Probieren: Für $B_{40;0,06} : P(X \geqq 1) \approx 0,9158$ (zu klein)
...Für $B_{48;0,06} : P(X \geqq 1) \approx 9487$ (zu klein) und für $B_{49,0,06} : P(X \geqq 1) \approx 0,9518$

Bei 49 Spendern ist mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Spender mit Blutgruppe 0 dabei.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Spender, die benötigt werden, um mit mindestens 90%iger Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Spender mit Blutgruppe 0- zu haben. (2 BE)

$P(X \geqq 2) \geqq 0,90$

Systematisches Probieren: Für $B_{50;0,06}: P(X \geqq 2) \approx 0,8100$ (zu klein).
Für $B_{60;0,06}: P(X \geqq 2) \approx 0,8821$ (zu klein). Für $B_{70;0,06}: P(X \geqq 2) \approx 0,9281$ (zu groß).
Für $B_{63;0,06}: P(X \geqq 2) \approx 0,8982$ (zu klein). Für $B_{64;0,06}: P(X \geqq 2) \approx 0,90307$

Bei 64 Spendern sind mit mindestens 90%iger Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Spender mit Blutgruppe 0 dabei.

c) Bestimmen Sie die Anzahl der Spender, die benötigt werden, um mit mindestens 85%iger Wahrscheinlichkeit mindestens vier Spender mit Blutgruppe 0- zu haben. (2 BE)

$P(X \geqq 4) \geqq 0,85$

Systematisches Probieren: Für $B_{90;0,06}: P(X \geqq 4) \approx 0,7955$ (zu klein).
Für $B_{100;0,06}: P(X \geqq 4) \approx 0,8570$ (zu groß). Für $B_{95;0,06}: P(X \geqq 4) \approx 0,8285$ (zu klein).
Für $B_{98;0,06}: P(X \geqq 4) \approx 0,8461$ (zu klein). Für $B_{99;0,06}: P(X \geqq 4) \approx 0,8516$

Bei 99 Spendern sind mit mindestens 85%iger Wahrscheinlichkeit mindestens vier Spender mit Blutgruppe 0 dabei.

Aufgabe 4 (14 BE)

3.4 Aus der Erfahrung weiß man, dass etwa 80 % der medizinischen Einrichtungen Deutschlands in der Radiodiagnostik Präparate mit ^{99m}Tc verwenden.

3.4.1 Fünf zufällig ausgewählte Einrichtungen werden zum Einsatz dieser Präparate befragt. Die Zufallsgröße X entspricht der Anzahl der Einrichtungen, die Präparate mit ^{99m}Tc einsetzen. 7 BE

Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X als binomialverteilt angenommen werden kann.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und stellen Sie diese grafisch dar.

3.4.2 Bei einer anderen Erhebung wurden 50 Einrichtungen befragt. 7 BE

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

A: 90 % der befragten Einrichtungen setzen das Präparat ^{99m}Tc ein.

B: Mindestens 30, aber weniger als 40 der befragten Einrichtungen setzen das Präparat ^{99m}Tc ein.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis an:

C: Die zweite Einrichtung setzt dieses Präparat ein.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis:

D: Genau eine der ersten vier Einrichtungen setzt diese Präparat ein.

Abbildung 2: Abitur M-V A3, 2018

3.4.1 Es gibt die Ergebnisse, dass die Einrichtungen die Präparate mit ^{99m}Tc einsetzen oder eben nicht einsetzen. Außerdem verändert sich die Wahrscheinlichkeit nicht, da dies ein deutschlandweiter Anteil ist.

$B_{5;0,8}$ kann also angenommen werden und dafür die Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgestellt

werden. Hier wird dies nur mit hilfe der Rechnungen (nicht tabellarisch) dargestellt. Das Histogramm muss selbstständig gezeichnet werden.

$P(X=0) \approx 0,0003$; $P(X=1) \approx 0,0064$; $P(X=2) \approx 0,0512$;
$P(X=3) \approx 0,2048$; $P(X=4) \approx 0,4096$; $P(X=5) \approx 0,3277$

3.4.2 $B_{50;0,8}$ kann angenommen werden aufgrund von 3.4.1

90% von 50 Einrichtungen sind 45 Einrichtungen $\rightarrow P(A) = P(X=45) \approx 0,0295$

$P(B) = P(30 \leqq X < 40) \approx 0,4161$

$P(C) = 0,8$, da die Wahrscheinlichkeit sich auch für die zweite Einrichtung 80% ist und gleich bleibt (Bedingung der Binomialverteilung).

Für $P(D)$ muss $B_{4;0,8}$ angenommen werden, da es nur um (die ersten) 4 Einrichtungen geht:
$P(D) = P(X=1) \approx 0,0256$

Aufgabe 5 (3 BE)

Zeigen Sie im Fall $n=3$, dass für binomialverteilte Zufallsgrößen gilt: $\mu = 3 \cdot p$.
Hinweis: Nutzen Sie $\mu = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3)$

Wie bereits im Hinweis mitgeteilt, berechnet sich der Erwartungswert für $n=3$ durch die Formel:

$$\mu = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3)$$

Es gilt:

$P(X=0) = \binom{3}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^3 = 1 \cdot 1 \cdot (1-p)^3) = (1-p)^3$

$P(X=1) = \binom{3}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^2 = 3 \cdot p \cdot (1-p)^2 = 3p \cdot (1-2p+p^2) = 3p - 6p^2 + 3p^3$

$P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^1 = 3 \cdot p^2 \cdot (1-p) = 3p^2 - 3p^3$

$P(X=3) = \binom{3}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^0 = 1 \cdot p^3 \cdot 1 = p^3$

Also ist

$\mu = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3)$

$\mu = 0 \cdot (1-p)^3 + 1 \cdot (3p - 6p^2 + 3p^3) + 2 \cdot (3p^2 - 3p^3) + 3 \cdot p^3$

$\mu = 0 + 3p - 6p^2 + 3p^3 + 6p^2 - 6p^3 + 3p^3$

$\mu = 3p - 6p^2 + 6p^2 + 6p^3 - 6p^3$

$\mu = 3p$