Skalarprodukt und Kreuzprodukt (27.02.2020)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} \circ \vec{b}$; $\vec{a} \circ \vec{c}$ und $\vec{b} \circ \vec{c}$

$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = -4$ $\quad$ $\vec{a} \circ \vec{c} = 0 + 2 + 0 = 2$ $\quad$ $\vec{b} \circ \vec{c} = 0 - 4 + 3 = -1$

d) $|\vec{a} + \vec{b}|$ und $|\vec{a} - \vec{c}|$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$|\vec{a} - \vec{c}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

e) $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$ und $\vec{b} \times \vec{c}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2) \\ 0 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 - 2 \\ -4 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 0 - 6 \\ 4 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 - 2 \\ 0 - (-3) \\ -2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (4 BE)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} y_a \cdot z_b - z_a \cdot y_b \\ z_a \cdot x_b - x_a \cdot z_b \\ x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} -x_b \\ -y_b \\ -z_b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_b \cdot z_a - (-z_b) \cdot y_a \\ -z_b \cdot x_a - (-x_b) \cdot z_a \\ -x_b \cdot y_a - (-y_b) \cdot x_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_b \cdot z_a + z_b \cdot y_a \\ -z_b \cdot x_a + x_b \cdot z_a \\ -x_b \cdot y_a + y_b \cdot x_a \end{pmatrix}$$

Aus $-y_b \cdot z_a + z_b \cdot y_a$ wird nach Vertauschung der Summanden der Term $z_b \cdot y_a - y_b \cdot z_a$. Tauscht man nun noch die Faktoren, so wird aus $z_b \cdot y_a - y_b \cdot z_a$ der Term $y_a \cdot z_b - z_a \cdot y_b$. Daher gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} y_a \cdot z_b - z_a \cdot y_b \\ z_a \cdot x_b - x_a \cdot z_b \\ x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_b \cdot z_a + z_b \cdot y_a \\ -z_b \cdot x_a + x_b \cdot z_a \\ -x_b \cdot y_a + y_b \cdot x_a \end{pmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Aufgabe 3 (3 BE)

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2 + (z_a)^2} = \sqrt{x_a \cdot x_a + y_a \cdot y_a + z_a \cdot z_a}$$

$$\sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}} = \sqrt{x_a \cdot x_a + y_a \cdot y_a + z_a \cdot z_a}$$

Also gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$

Aufgabe 4 (4 BE)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c} \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b + x_c \\ y_b + y_c \\ z_b + z_c \end{pmatrix} = x_a \cdot (x_b + x_c) + y_a \cdot (y_b + y_c) + z_a \cdot (z_b + z_c)$$

$$= x_a \cdot x_b + x_a \cdot x_c + y_a \cdot y_b + y_a \cdot y_c + z_a \cdot z_b + z_a \cdot z_c$$

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b + x_a \cdot x_c + y_a \cdot y_c + z_a \cdot z_c$$

Beide Ausdrücke sind gleich. Dazu müssen nur noch verschiedene Summanden umsortiert werden.

Aufgabe 5 (6 BE)

Machen Sie sich eine Übersicht über folgende Vierecksarten und deren Eigenschaften: Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Rhombus/Raute, Trapez und gleichschenkliges Trapez.

Eine sehr gute Übersicht finden Sie beispielsweise hier: `https://de.serlo.org/mathe/geometrie/dreiecke-vierecke-kreise-andere-ebene-figuren/viereck/beziehungen-zwischen-vierecken/haus-vierecke`. Im Unterricht haben wir die grundlegenden Eigenschaften in Ausdrücken der Analytischen Geometrie für jedes Viereck formuliert. Zur Erinnerung:

parallel: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow k \cdot \vec{a} = \vec{b}$ für ein beliebiges $k \in \mathbb{R}$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$, weil $\frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, weil es kein $k \in \mathbb{R}$ gibt

gleich lang: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

gleich lang und parallel: $(\pm 1) \cdot \vec{a} = \vec{b}$

rechtwinklig: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$