Vektoren im $\mathbb{R}^3$ (06.02.2020)

H. Wuschke

## Aufgabe 1 (3 BE)

Gegeben seien die Punkte $A(x_A|y_A|z_A)$ und $B(x_B|y_B|z_B)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

Es ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{pmatrix}$

Außerdem ist $-\overrightarrow{BA} = -\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x_A - x_B) \\ -(y_A - y_B) \\ -(z_A - z_B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_A + x_B \\ -y_A + y_B \\ -z_A + z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$

Also gilt: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

## Aufgabe 2 (6 BE)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+6 \\ 1-3+8 \\ 3+5-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0+6 \\ 1+3+8 \\ 3-5-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -18 \end{pmatrix}$

c) $-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} -2+0-6 \\ -1-3-8 \\ -3+5+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix}$

d) $3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 35 \end{pmatrix}$

e) $2 \cdot \vec{a} + 4 \cdot \vec{b} - \frac{5}{2} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 \\ -20 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -30 \\ 66 \end{pmatrix}$

f) $-\frac{5}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{4}{3} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{15}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{24}{3} \\ \frac{32}{3} \\ -\frac{64}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ 8 \\ -\frac{74}{3} \end{pmatrix}$

## Aufgabe 3 (2 + 3 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die gerade Pyramide $ABCDS$ gegeben. Die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche ist 5, die Höhe der Pyramide 7.

a) Geben Sie mögliche Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide an.

$A(0|0|0), B(5|0|0), C(5|5|0), D(0|5|0), \qquad S(2,5|2,5|7)$

Den Punkt $S$ bekommt man durch den Mittelpunkt von $ABCD$ ermittelt.

b) Mindestens einer der Eckpunkte soll so verschoben werden, dass sich das Volumen der Pyramide vervierfacht. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten jeweils die Koordinaten der verschobenen Eckpunkte an und begründen Sie Ihre Angabe.

Es gilt $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$

Variante 1: Die Höhe wird 4 Mal so hoch gewählt: $S(2,5|2,5|28)$, dann ist das Volumen auch 4 Mal so groß.

Variante 2: Beispielsweise $A(0|0|0)$, $B(20|0|0)$, $C(20|5|0)$ und $D(0|5|0)$, dann wären die parallelen Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ viermal so lang, aber $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ wären weiterhin 5 LE lang.

Variante 3: Alle Seitenlängen werden verdoppelt: $A(0|0|0)$, $B(10|0|0)$, $C(10|10|0)$ und $D(0|10|0)$, dann würde sich $A_G$ auch vervierfachen.

Wichtig ist bei Variante 2 und Variante 3, dass $S$ weiterhin die $x_3$-Koordinate 7 beibehält, damit sich die Höhe der Pyramide nicht ändert.

Es sind auf jeden Fall noch mehr Varianten möglich.

## Aufgabe 5 (3 BE)

Bestimmen Sie den Einheitsvektor $\vec{a_0}$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 8^2 + 0^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

$\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \\ 0 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 6 (3 BE)

Untersuchen Sie, ob das $\triangle ABC$ mit $A(0|3|0)$, $B(2|4|6)$ und $C(-1|-2|-3)$ gleichschenklig ist.

$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 6^2} = \sqrt{41}$ LE

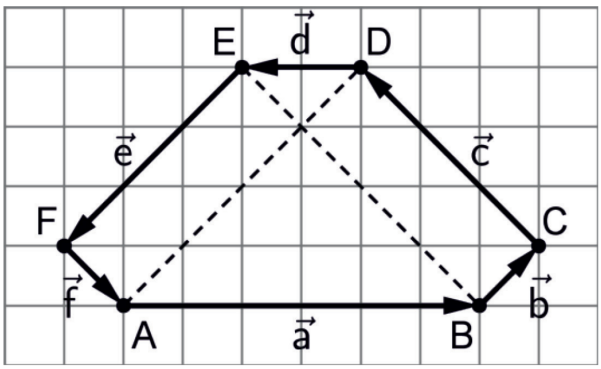
$|\overrightarrow{AC}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$ LE

$|\overrightarrow{BC}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + (-9)^2} = \sqrt{126}$ LE

Keine zwei Seiten sind gleich lang, also ist das Dreieck $ABC$ nicht gleichschenklig.

## Aufgabe 4 (2 + 1 + 2 BE)

Im abgebildeten Sechseck $ABCDEF$ sind jeweils zwei Seiten parallel zueinander.




a) Stellen Sie die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ jeweils mithilfe der Eckpunkte des Sechsecks dar.

$\vec{x} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{BE}$ $\qquad$ $\vec{y} = \vec{a} + \vec{c} = \overrightarrow{FE}$

b) Stellen Sie nun den Vektor $\overrightarrow{FB}$ mithilfe von genau drei der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ und $\vec{f}$ dar.

$\overrightarrow{FB} = \vec{f} - \vec{e} - \vec{c}$

c) Der Punkt $A$ hat in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten $x_1 = 6$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -4$. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ wird mit $M$ bezeichnet. Der Punkt $K(2|0|8)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$. Ermitteln Sie die Koordinaten von $B$.

Aus dem Text kann entnommen werden, dass $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 4 \cdot \overrightarrow{AK}$ gilt.
(Eine Skizze hilft hier.)

$$\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 44 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad B(-10|-6|44)$$