Aufgaben zu Funktionsuntersuchung/-bestimmung (28.11.2019)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (24 BE)

Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f.

a) $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 9x$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Symmetrie: keine Symmetrie

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|0)$; $\quad S_{x_1}(-4,85|0)$; $\quad S_{x_2}(0|0)$; $\quad S_{x_3}(1,85|0)$

Extrempunkte: $H(-3|27)$ und $T(1|-5)$

Wendepunkt: $W(-1|11)$

b) $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)^2(x+3)$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Symmetrie: keine Symmetrie

Achsenschnittpunkte: $S_y\left(0|\frac{3}{2}\right)$; $\quad S_{x_1}(-3|0)$; $\quad S_{x_2}(1|0)$

Extrempunkte: $H\left(-\frac{5}{3}|\frac{128}{27}\right)$ und $T(1|0)$

Wendepunkt: $W\left(-\frac{1}{3}|\frac{64}{27}\right)$

c) $f : x \mapsto x^4 - 2x^2$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}; y \geqq -1$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$

Symmetrie: achsensymmetrisch $(f(x) = f(-x))$

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|0)$; $\quad S_{x_1}(-\sqrt{2}|0)$; $\quad S_{x_2}(0|0)$; $\quad S_{x_3}(\sqrt{2}|0)$

Extrempunkte: $T_1(-1|-1)$ und $H(0|0)$ und $T_2(1|-1)$

Wendepunkt: $W_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}|-\frac{5}{9}\right)$ und $W_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}|-\frac{5}{9}\right)$

d) $f : x \mapsto 2x^3 - 6x$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Symmetrie: punktsymmetrisch $(f(-x) = -f(x))$

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|0)$; $\quad S_{x_1}(-\sqrt{3}|0)$; $\quad S_{x_2}(0|0)$; $\quad S_{x_3}(\sqrt{3}|0)$

Extrempunkte: $H(-1|4)$ und $T(1|-4)$

Wendepunkt: $W(0|0)$

Aufgabe 2 (5 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x$.
Berechnen Sie den Abstand zwischen Hoch- und Tiefpunkt.

$f'(x) = -2x^2 - 2x + 4$ und $f''(x) = -4x - 2$

$0 = f'(x) \quad \rightarrow \quad x_1 = -2 \quad$ und $x_2 = 1$

$f''(-2) = 6 > 0 \rightarrow$ bei $x = -2$ ist ein lokales Minimum;
$f''(1) = -6 < 0 \rightarrow$ bei $x = 1$ ist ein lokales Maximum

$f(-2) = -\frac{20}{3} \quad \Rightarrow \quad T\left(-2 | -\frac{20}{3}\right)$

$f(1) = \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad H\left(1 | \frac{7}{3}\right)$

Abstand d (*distance*) berechnen über die Formel $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d = \sqrt{(-2-1)^2 + (-\frac{20}{3} - \frac{7}{3})^2} = \sqrt{90} \approx 9,49$ LE

Aufgabe 3 – ohne CAS (9 BE)

Skalieren Sie das Koordinatensystem zu den gegebenen Funktionsgraphen.

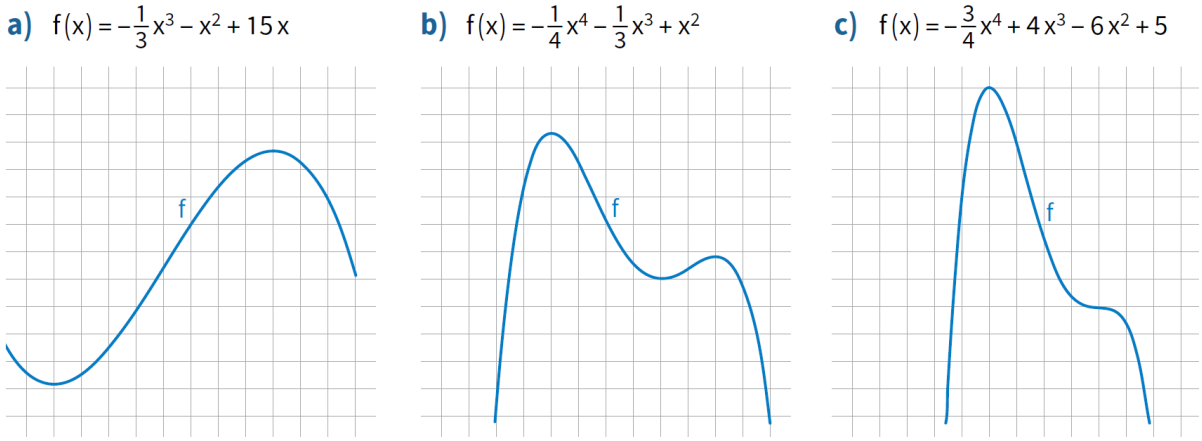

Abbildung 1: Quelle: Elemente der Mathematik Sachsen 11, S. 130.

Aufgabe 4 (12 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung eines Polynoms dritten Grades, dessen Graph die nachfolgenden Eigenschaften besitzt und skizzieren Sie diese: Es ist $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ und $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ und $f''(x) = 6a \cdot x + 2b$

a) Der Graph hat im Punkt $T(1|0)$ einen Tiefpunkt und im Punkt $H(3|4)$ einen Hochpunkt.

Die Bedingungen sind $f(1) = 0$ (Punkt), $f'(1) = 0$ (Tiefpunkt), $f(3) = 4$ (Punkt) und $f'(3) = 0$ (Hochpunkt).

$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

b) Der Koordinatenursprung ist Wendepunkt, der Punkt $H(3|2)$ ist Hochpunkt.

Die Bedingungen sind $f(0) = 0$ (Punkt), $f''(0) = 0$ (Wendepunkt), $f(3) = 2$ (Punkt) und $f'(3) = 0$ (Hochpunkt).

$f(x) = -\frac{1}{27}x^3 + x$

c) Im Wendepunkt $W(2|4)$ hat die Wendetangente die Steigung -3, außerdem geht der Graph durch den Ursprung.

Die Bedingungen sind $f(0) = 0$ (Punkt), $f(2) = 4$ (Punkt), $f''(2) = 0$ (Wendepunkt) und $f'(2) = -3$ (Steigung der Wendetangente).

$f(x) = \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 12x$

d) Der Graph geht durch den Koordinatenursprung und hat in $S(2|1)$ einen Sattelpunkt.

Die Bedingungen sind $f(0) = 0$ (Punkt), $f(2) = 1$ (Punkt), $f'(2) = 0$ (Sattelpunkt) und $f''(2) = 0$ (Sattelpunkt).

$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$