Aufgaben zu Linearen Gleichungssystemen (14.11.2019)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (18 BE)

Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender LGS und überprüfen Sie Ihr Ergebnis anschließend mithilfe dem CAS.

1.
$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ 4x & - & 5y & - & 2z & = & 3 \\ 6x & + & y & - & 5z & = & 9 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & -5 & 9 \end{array}\right) \underset{III+3I}{\overset{II+2I}{\rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{array}\right) \underset{3\cdot III}{\overset{4\cdot II}{\rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -12 & 8 & 4 \\ 0 & 12 & 3 & 18 \end{array}\right)$$

$$\overset{III+II}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -12 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{array}\right) \rightarrow z = 2 \quad \rightarrow y = 1 \quad \rightarrow x = -3 \quad \Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

2.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 10 \\ -x & - & 4y & + & 2z & = & -4 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 10 \\ -1 & -4 & 2 & -4 \end{array}\right) \underset{III+I}{\overset{II-2I}{\rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{III+II}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad 0 = 1 \text{ Widerspruch}$$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \{\}$ eine andere Schreibweise wäre $\mathcal{L} = \emptyset$

3.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 10 \\ -x & - & 4y & + & 2z & = & -5 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 10 \\ -1 & -4 & 2 & -5 \end{array}\right) \underset{III+I}{\overset{II-2I}{\rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{III+II}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ & & 5y & - & 3z & = & 0 \end{array}$$

Wir haben nun also 2 Gleichungen und 3 Unbekannte, also muss eine Unbekannte als beliebige Variable gesetzt werden. Nehmen wir dafür beispielsweise z.

Setze $z = t \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad 5y = 3t \Rightarrow y = \frac{3}{5}t$

$x - \frac{3}{5}t + t = 5 \Leftrightarrow x = 5 - \frac{2}{5}t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{2}{5}t \\ & \frac{3}{5}t \\ & t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

4. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 4 \\ -x & + & y & - & z & = & -6 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & -6 \end{array}\right) \overset{II-I}{\underset{III+I}{\rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \rightarrow z = 3 \quad \rightarrow y = 2 \quad \rightarrow x = 5$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

5. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ -2x & + & y & + & z & = & 2 \\ & - & 5y & + & z & = & 2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{II+2I}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{III+II}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right) \quad 0 = 8 \text{ Widerspruch}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \{\}$$

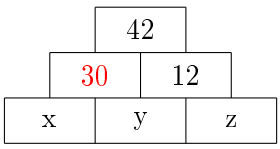
6. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & z & = & 3 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{II-I}{\underset{III-I}{\rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right) \overset{III+II}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow -2z = -6 \Leftrightarrow z = 3 \quad \rightarrow y - 2 \cdot 3 = -2 \Leftrightarrow y = 4 \quad \rightarrow x + 3 = 3 \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 2 (6 + 4 BE)

Früher hatten Sie im Unterricht Zahlenmauern oder Rechentafeln, um die Addition verschiedener Zahlen zu üben.



+	4	y	7
3	7		10
x		6	
5	9		12

a) Stellen Sie für die Zahlenmauer und die Rechentafel das entsprechende Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses.

Für die Zahlenmauer gelten die Gleichungen

$$x + y = 30 \qquad \text{und} \qquad y + z = 12$$

Wie in Aufgabe 1.3 haben wir 2 Gleichungen und 3 Unbekannte, also muss wieder eine Unbekannte als eine beliebige Variable gesetzt werden. Wählen wir dieses Mal y, weil es in beiden Gleichungen vorkommt.

Setze $y = t \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad x = 30 - t$ und $z = 12 - t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -t \\ & t \\ 12 & -t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

In der Rechentafel gilt lediglich eine Gleichung:

$$x + y = 6$$

Dies ist also 1 Gleichung mit 2 Unbekannten. Setzen wir also $y = t \in \mathbb{R}$, dann ist $x = 6 - t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -t \\ & t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Eine Lehrkraft an der Grundschule möchte sich wenig Arbeit machen und möglichst viele Zahlenmauern bzw. Rechentafeln aus den beiden Vorlagen erstellen. Begründen Sie, wie viele Möglichkeiten es für die Zahlenmauer und wie viele es für die Rechentafel gibt.

Bei der Zahlentafel dürfen keine negativen Zahlen stehen, keine Brüche und erst recht keine irrationalen Zahlen. Es darf also maximal 0 als nicht natürliche Zahl da stehen und ansonsten können Zahlenmauern und Rechentafeln in der Grundschule aus natürlichen Zahlen bestehen.

Aus der Zahlenmauer können 13 verschiedene Mauern aufgrund der Lösungsmenge gemacht werden. Analog gibt es bei der Rechentafel 7 verschiedene Rechentafeln.