2. Trigonometrie

2.2 Verhältnisse im allgemeinen Dreieck

H. Wuschke

28. November 2022

Ziele der Sitzung

- Sinussatz herleiten und anwenden
- Kosinussatz herleiten und anwenden
- Vollständige Berechnungen in allgemeinen Dreiecken

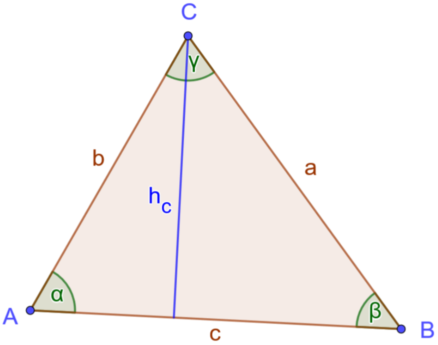

Abbildung: Allgemeines Dreieck [H.W. 2019, GeoGebra]

Sinussatz

In jedem Dreieck ABC gelten folgende Verhältnisse:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

Aufgaben A1

Berechnen Sie die fehlenden Größen im allgemeinen $\triangle ABC$.

1. $a = 2$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 50°$
2. $b = 2$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 50°$
3. $c = 2$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 50°$
4. $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 79°$
5. $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 79°$
6. $b = 5$ cm, $c = 4,5$ cm, $\alpha = 79°$

Bemerkung

Bei stumpfwinkligen Dreiecken ist Achtung geboten, da der Arkussinus ($\sin^{-1}$) nur bis 90° eindeutig definiert ist. Es gilt:

$$\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha); \qquad 90^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ$$

Beispiel

<u>geg.:</u> $b = 7,0$ cm; $c = 5,0$ cm; $\gamma = 23^\circ$ <u>ges.:</u> β (stumpf)

<u>Lsg.:</u> $\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \quad \stackrel{\cdot b}{\Rightarrow} \quad \sin(\beta) = \frac{\sin(\gamma)\cdot b}{c} = \frac{\sin(23^\circ)\cdot 7{,}0 \text{ cm}}{5{,}0 \text{ cm}}$

$\Rightarrow \sin(\beta) \approx 0,547 \quad \stackrel{\sin^{-1}}{\Rightarrow} \quad \beta \approx 33,2^\circ$

Da aus der Planfigur oder der Information im Text bekannt ist, dass β ein stumpfer Winkel ist, gilt:

$$\beta \approx 180^\circ - 33,2^\circ = 146,8^\circ$$

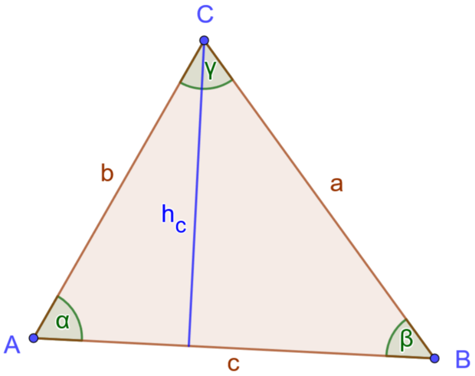

Abbildung: Allgemeines Dreieck [H.W. 2019, GeoGebra]

Flächeninhaltsformel(n)

In jedem Dreieck ABC gilt für den Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha)$$

Aufgaben A2

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dreiecke aus Aufgabe A1.

1. $a = 2$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 50°$
2. $b = 2$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 50°$
3. $c = 2$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 50°$,
4. $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 79°$

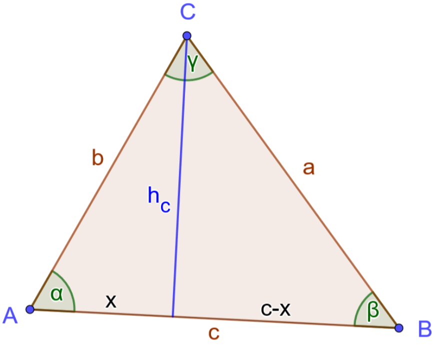

Abbildung: Allgemeines Dreieck [H.W. 2019, GeoGebra]

Kosinussatz

In jedem Dreieck ABC gelten folgende Verhältnisse:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Aufgaben A3

Berechnen Sie die fehlenden Größen im allgemeinen $\triangle ABC$.

1. $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 7$ cm
2. $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 2$ cm
3. $a = 9$ cm, $b = 5$ cm, $c = 4{,}5$ cm