2. Trigonometrie

2.1 Verhältnisse im rechtwinkligen Dreieck

H. Wuschke

14. November 2022

Ziele der Sitzung

- Begriffe *Gegenkathete* und *Ankathete* anhand ausgewählter Beispiele unterscheiden können
- Die Verhältnisse Sinus, Kosinus, Tangens, Kotangens, Sekans und Kosekans für verschiedene rechtwinklige Dreiecke aufstellen und berechnen können
- Vollständige Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken vornehmen

Definition Trigonometrie

Die **Trigonometrie** beschäftigt sich mit dem Messen ($\mu\epsilon\tau\rho o\nu$) von dreiseitigen ($\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o$) Objekten.

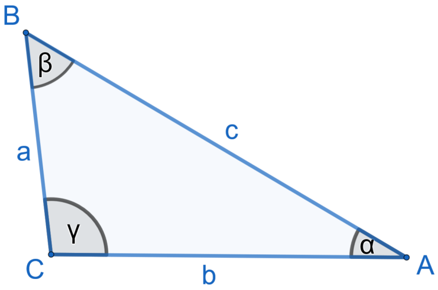

Abbildung: Allgemeines Dreieck [H.W. 2018, GeoGebra]

Zunächst gilt in Dreiecken:

- $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$
  g ist die Grundseite
  h ist die Höhe auf g
- $U = a + b + c$
- $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

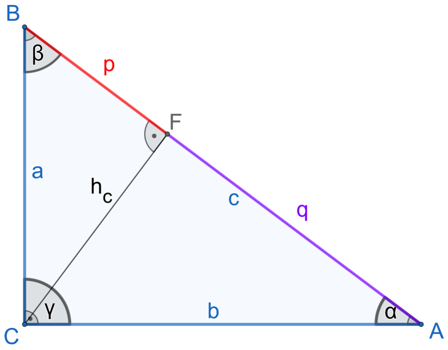

Abbildung: Rechtwinkliges Dreieck [H.W. 2018, GeoGebra]

Hypotenuse/Kathete

Die Seite gegenüber dem rechten Winkel heißt Hypotenuse (c), die übrigen Seiten bezeichnet man als Katheten (a und b).

h_c ... Höhe auf c
p, q ... Hypotenusenabschnitte

Spezielle Formeln für rechtwinklige Dreiecke (Bezeichnungen wie in der Abbildung)

- $\alpha + \beta = 90^\circ = \gamma$
- $a^2 + b^2 = c^2$ (Satz des Pythagoras)
- $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ (Flächeninhalt)
- $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$ (Kathetensatz des Euklid)
- $h_c^2 = p \cdot q$ (Höhensatz des Euklid)
- Aus beiden Sätzen des Euklid folgt: $h_c = \frac{a \cdot b}{c}$

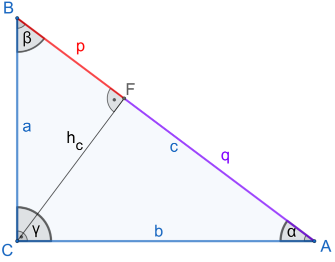

Abbildung: Rechtwinkliges Dreieck [H.W. 2018, GeoGebra]

Gegenkathete/Ankathete

Die Katheten können auch in Abhängigkeit von den Winkeln bezeichnet werden. Die Kathete gegenüber eines Winkels heißt **Gegenkathete**, die Kathete, die an einem Winkel liegt, heißt **Ankathete**.

a ... Gegenkathete zu α und Ankathete zu β

b ... Gegenkathete zu β und Ankathete zu α

Aufgaben A1

Gegeben sind verschiedene Dreiecke ABC.

a) Geben Sie alle Gegenkatheten und Ankatheten zu den entsprechenden Winkeln an.

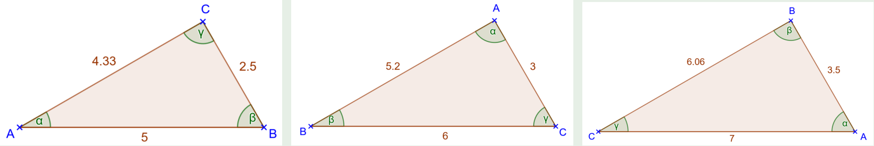

Abbildung: Rechtwinklige Dreieck [H.W. 2019, GeoGebra]

b) Bilden Sie alle möglichen Verhältnisse zwischen Gegenkathete (G), Ankathete (A) und Hypotenuse (H) eines Winkels bei einem ausgewählten Dreieck.

c) Die Winkel sind in allen Dreiecken $90^\circ, 30^\circ$ und 60° groß. Beschreiben Sie Ihre Feststellung über die Verhältnisse im Vergleich mit der Klasse.

Verhältnisse im rechtwinkligen Dreieck

Der Winkel α (und analog auch β) lässt sich im rechtwinkligen Dreieck durch Verhältnisse zwischen den Katheten und der Hypotenuse eindeutig beschreiben.

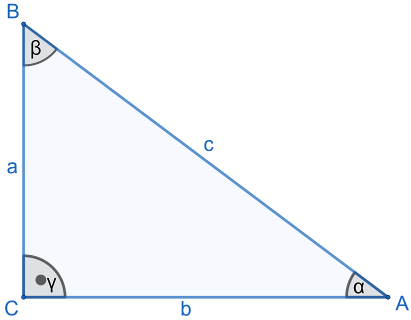

Abbildung: Rechtwinkliges Dreieck [H.W. 2018, GeoGebra]

Verhältnisse der Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} \quad \cot(\alpha) = \frac{b}{a}$$

$$\sec(\alpha) = \frac{c}{a} \quad \csc(\alpha) = \frac{c}{b}$$

a ist die Gegenkathete zu α

b ist die Ankathete zu α

Bemerkung zur Notation

Anstatt $\sin(\alpha)$ kann auch $\sin\alpha$ geschrieben werden.

Analog für die anderen Bezeichnungen.

Aufgaben A2

Sei $\triangle ABC$ rechtwinklig mit Hypotenuse c. Zeigen Sie anhand der definierten Seitenverhältnisse, dass folgende Gleichungen gelten:

1. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
2. $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ (trigonometrischer Pythagoras)
3. $1 + (\tan\alpha)^2 = \dfrac{1}{(\cos\alpha)^2}$
4. $1 + (\cot\alpha)^2 = \dfrac{1}{(\sin\alpha)^2}$

Formeln im rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse c

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \cos(\beta)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \sin(\beta) \qquad \tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \cot(\beta)$$

Aufgaben A3

Stellen Sie die gegebenen Formeln nach a, nach b und nach c um.

Winkel ermitteln

Aus gegebenen Seiten können auch Winkel (Gradmaß!!!) ermittelt werden durch Umkehroperationen:

Arkussinus: $\sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \alpha, \quad \sin^{-1}\left(\frac{b}{c}\right) = \beta$

Arkuskosinus: $\cos^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \beta, \quad \cos^{-1}\left(\frac{b}{c}\right) = \alpha$

Arkustangens: $\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \alpha \quad \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \beta$

Aufgaben A4

Gegeben ist ein rechtwinkliges $\triangle ABC$ mit Hypotenuse bei c. Berechnen Sie alle fehlenden Größen durch zwei verschiedene Rechenwege.

1. $a = 2$ cm, $c = 6$ cm
2. $b = 2$ cm, $c = 6$ cm
3. $a = 2$ cm, $b = 6$ cm
4. $\alpha = 30^\circ$, $c = 12$ cm
5. $\alpha = 30^\circ$, $b = 12$ cm
6. $\alpha = 30^\circ$, $a = 12$ cm
7. $\beta = 40^\circ$, $a = 5$ cm
8. $\beta = 40^\circ$, $b = 5$ cm
9. $\beta = 40^\circ$, $c = 5$ cm