1. Potenzfunktionen

H. Wuschke

24. August 2022

Ziele der Sitzung

- Potenzschreibweisen umwandeln können
- Definitions- und Wertebereich verschiedener Potenzfunktionen bestimmen
- Achsen- und punktsymmetrische Potenzfunktionen angeben können
- Begriff der *Asymptote* erklären
- Gleichungen mit Potenzfunktionen lösen

Potenzrechnung

Seien $x, y \in \mathbb{R}; \quad a, b \in \mathbb{Z}.$

Definition Potenz

Wird ein Faktor x (**Basis**) wiederholt mit sich selbst multipliziert, heißt das Ergebnis **Potenz** von x.

$$\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{\text{a-mal}} := x^a$$

Dabei ist a der **Exponent**

Potenzgesetze

$$\text{(P1 a)} \quad x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$$

$$\text{(P1 b)} \quad \frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$$

$$\text{(P2)} \quad x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$\text{(P3)} \quad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$\text{(P4)} \quad (x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

Definition x^{-k}

$$x^{-k} := \frac{1}{x^k}$$

Definition x^0

$$x^0 := 1$$

Definition x^1

$$x^1 := x$$

Beispiel für die Herleitung

$$x^{-2} \overset{\text{z.B.}}{=} x^{1-3} \overset{(P3)}{=} \frac{x}{x^3} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^2}$$

Beispiel für die Herleitung

$$x^0 \overset{\text{z.B.}}{=} x^{2-2} \overset{(P3)}{=} \frac{x^2}{x^2} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Beispiel für die Herleitung

$$x^1 \overset{\text{z.B.}}{=} x^{2-1} \overset{(P3)}{=} \frac{x^2}{x} = \frac{x \cdot \cancel{x}}{\cancel{x}} = x$$

Potenzen mit rationalen Exponenten

Überlegung

$(5^3)^{\frac{1}{3}} \stackrel{(P4)}{=} 5^{3\cdot\frac{1}{3}} = 5$

$\Rightarrow 5^{\frac{1}{3}} := \sqrt[3]{5}$

Definiton n-te Wurzel

Seien $x \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$. Die **n-te Wurzel** von x ist eine Zahl $y > 0$ für die gilt: $y^n = x$

Notation: $x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x} := y$

Potenzgesetze für rationale Exponenten

Seien $u, v \in \mathbb{R}^+$ und $p, q \in \mathbb{N}$

(P1 a') $\sqrt[p]{u} \cdot \sqrt[p]{v} = \sqrt[p]{u \cdot v}$

(P1 b') $\dfrac{\sqrt[p]{u}}{\sqrt[p]{v}} = \sqrt[p]{\dfrac{u}{v}}$

(P4') $\sqrt[p]{\sqrt[q]{u}} = \sqrt[p\cdot q]{u}$

Erläuterungen

$$\text{(P1 a')}\quad \sqrt[p]{u}\cdot\sqrt[p]{v} = u^{\frac{1}{p}}\cdot v^{\frac{1}{p}} \overset{\text{(P1 a)}}{=} (u\cdot v)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{u\cdot v}$$

$$\text{(P1 b')}\quad \frac{\sqrt[p]{u}}{\sqrt[p]{v}} = \frac{u^{\frac{1}{p}}}{v^{\frac{1}{p}}} \overset{\text{(P1 b)}}{=} \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{\frac{u}{v}}$$

$$\text{(P4')}\quad \sqrt[p]{\sqrt[q]{u}} = \left(u^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \overset{\text{(P4)}}{=} u^{\frac{1}{p\cdot q}} = \sqrt[p\cdot q]{u}$$

Bemerkungen

1. Es gilt: $\sqrt[q]{u^p} = (u^p)^{\frac{1}{q}} \overset{(P4)}{=} u^{p\cdot\frac{1}{q}} = u^{\frac{p}{q}}$
2. Die Wurzel einer Zahl ist im Bereich der reellen Zahlen nur für positive reelle Zahlen definiert.

Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich, Potenzfunktion

Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich

Eine **Funktion** f ordnet jedem $x \in D$ eindeutig ein $y \in W$ zu. Dabei heißt D auch der **Definitionsbereich** und W der **Wertebereich** von f

Häufig schreibt man für diese Zuordnung: $y = f(x)$.

Beispiele 1

$f_1(x) = 2x - 3$
Hier ist $D = \mathbb{R}$ und $W = \mathbb{R}$, da alles eingesetzt werden kann und alles herauskommen kann.

$f_2(x) = x^2 + 3$
Hier ist $D = \mathbb{R}$ und $W = \{y \mid y \geqq 3\}$

Potenzfunktion

Sei $p \in \mathbb{Q}$. Eine Funktion $f(x) = x^p$ heißt **Potenzfunktion**.

Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten

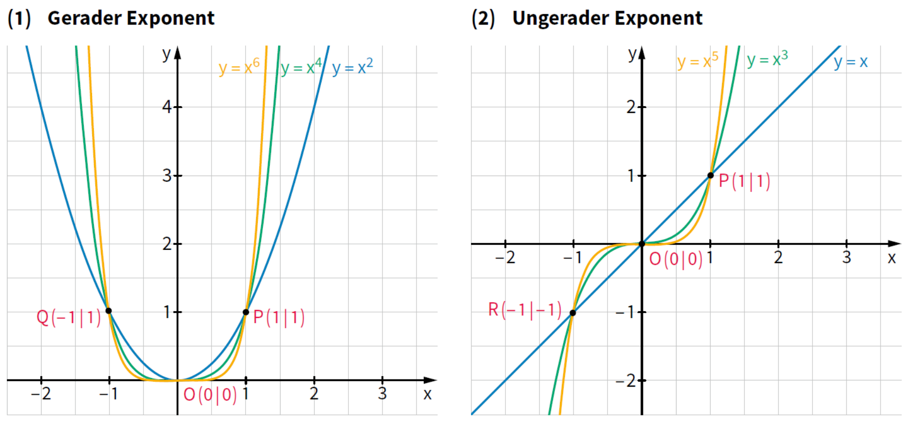

Abbildung: EdM Einführungsphase NRW, S. 25.

Welche Eigenschaften haben die Funktionen in Bezug auf Definitionsbereich, Wertebereich, Monotonie, spezielle Punkte, Symmetrie?

Potenzfunktionen mit negativem, ganzzahligem Exponenten

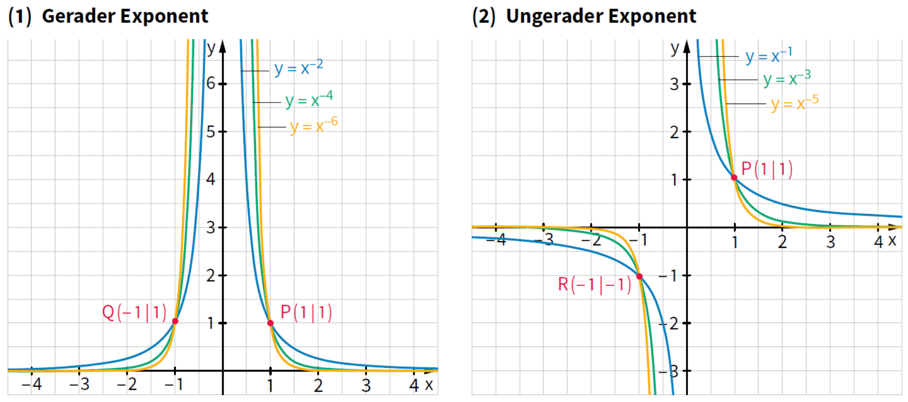

Abbildung: EdM Einführungsphase NRW, S. 32.

Welche Eigenschaften haben die Funktionen in Bezug auf Definitionsbereich, Wertebereich, Monotonie, spezielle Punkte, Symmetrie?

Verschiebung von Potenzfunktionen

Verschiebung entlang der y-Achse

Sei $p \in \mathbb{Q}$ und $a \in \mathbb{R}$.
Der Parameter a verschiebt die Potenzfunktion

$$f(x) = x^p + a$$

um a nach oben für $a > 0$ und um a nach unten für $a < 0$.
Dadurch wird der Wertebereich nach oben/unten verschoben.

Verschiebung entlang der x-Achse

Sei $p \in \mathbb{Q}$ und $c \in \mathbb{R}$.
Der Parameter c verschiebt die Potenzfunktion

$$f(x) = (x + c)^p$$

um c nach links für $c > 0$ und um c nach rechts für $c < 0$.
Dadurch wird der Definitionsbereich nach links/rechts verschoben.

Aufgaben A1

Verschieben Sie die gegebenen Funktionen in die vorgegebenen Richtungen.

$f(x) = x^4$	3 LE[a] $\rightarrow$ und 2 LE $\uparrow$.
$g(x) = x^{13}$	$4,5$ LE $\downarrow$ und $0,8$ LE $\rightarrow$.
$h(x) = (x-2)^2$	6 LE $\leftarrow$ und 4 LE $\downarrow$.
$k(x) = (x+1,5)^{2019} - 2,8$	13 LE $\uparrow$ und 7 LE $\rightarrow$.
$m(x) = x^7 - 3$	$5,2$ LE $\leftarrow$ und $5,2$ LE $\uparrow$.

[a] Längeneinheit(en)

Aufgaben A1*

Variieren Sie in der Verschiebung bei den gegebenen Funktionen. Bestimmen Sie den Wertebereich der Funktionen.

Asymptoten

Polstelle und waagerechte Asymptote

Eine Gerade, der sich eine Funktion beliebig dicht annähert, heißt **Asymptote**.
Dies kann einerseits aufgrund des Definitionsbereiches sein, dann ist es eine senkrechte Asymptote an einer **Polstelle**.
Andererseits kann dies im Wertebereich sein, dann spricht man von einer waagerechten Asymptote.

Bemerkung

Alle Potenzfunktionen der Form

$$f(x) = b \cdot x^{-n}, n \in \mathbb{N}$$

haben eine senkrechte Asymptote bei $x = 0$ und eine waagerechte Asymptote bei $y = 0$.

Aufgaben A2

Geben Sie für die nachfolgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich die Art der Symmetrie sowie die Gleichungen der senkrechten und waagerechten Asymptoten, sofern diese vorhanden sind, an.

$$f(x) = x^{-2}$$

$$g(x) = x^{-3} - 2$$

$$h(x) = (x-4)^4 - 6$$

$$k(x) = (x-3)^{-4}$$

$$m(x) = x^7 - 13$$

$$n(x) = (x+5)^{-5} - 7$$

$$p(x) = (x-8)^{-6} + 3,5$$

Wurzelfunktion

Wurzelfunktion

Seien $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Eine Potenzfunktion $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ heißt **Wurzelfunktion**.
Ihr Definitions- und Wertebereich ist $D = W = \mathbb{R}_0^+$, also alle $x \geqq 0$ und $y \geqq 0$.

Quadrat- und Kubikwurzelfunktion

In der Anwendung sind vor allem die Quadratwurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ und Kubikwurzelfunktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ von Interesse.

Aufgaben A3

Geben Sie den Definitions- und Wertebereich der gegebenen Wurzelfunktionen an:

$$f(x) = \sqrt{x+5}$$

$$g(x) = \sqrt[4]{x} - 3$$

$$h(x) = \frac{5}{8} \cdot (x-4)^{\frac{5}{9}}$$

$$k(x) = \frac{7}{4} \cdot (x+7)^{\frac{3}{7}} - 8$$

$$m(x) = \frac{4}{13} \cdot \sqrt[3]{x-14} - 2$$

Aufgaben A4

Bestimmen Sie die Nullstellen von Aufgabe A3.

Aufgaben A5

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichungen.

a) $17 = \sqrt[5]{6 \cdot x}$

b) $(x + 8)^6 = 9$

c) $(x - 3)^2 - 8 = -3x^2 + 5 \cdot x + 15$

d) $x^{\frac{5}{9}} = 8,4$

e) $5 \cdot x^7 - 6 = 19$

f) $(x - 8)^{\frac{6}{5}} + 7 = 26$

g) $\sqrt{(x - 12)^5} + 2 = 32$