Wiederholung Trigonometrie (04./05.10.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (12 BE)

Fertigen Sie eine Mind-Map zum Thema „Dreiecke“ an. (u.a. Tafelwerk S. 19)

Verbindliche Unterpunkte in der Mind-Map:

- Dreiecksarten (nach den Seiten, nach den Winkeln)
- Standardbeschriftung
- besondere Linien und Punkte
- Formeln/besondere Eigenschaften

Lösung siehe letzte Seite

Aufgabe 2 (10 BE)

Vervollständigen Sie folgende Tabelle mithilfe des Satz des Pythagoras bei einem $\triangle ABC$ in Standardbeschriftung.

a	b	c	rechter Winkel bei
12 cm	16 cm	20 cm	γ
6 cm	8 cm	10 cm	γ
10 dm	8 dm	6 dm	α
7 cm	5 cm	8,6 cm	γ
12 cm	5 cm	13 cm	γ
5,39 km	4,1 km	3,5 km	α
8 m	12 m	8,94 m	β
3,4 cm	6,13 cm	51 mm	β
9,45 dm	13,4 dm	95 cm	β

Aufgabe 3 (18 BE)

Im Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm sind die beiden Punkte A und C gegeben. Berechnen Sie die Länge der Srecke $\overline{AC}$. (Tafelwerk S. 40)
Geben Sie außerdem den Umfang und den Flächeninhalt von $\triangle ABC$ an.

a)	b)	c)	d)	e)	f)
$A(-3\|1)$	$A(2\|7)$	$A(-6\|3)$	$A(-4\|-6)$	$A(-7\|-3)$	$A(x_1\|y_1)$
$B(3\|1)$	$B(7\|7)$	$B(2\|3)$	$B(7\|-6)$	$B(-2\|-3)$	$B(x_2\|y_1)$
$C(3\|4)$	$C(7\|4)$	$C(2\|-5)$	$C(7\|4)$	$C(-2\|-1)$	$C(x_2\|y_2)$

a) $\overline{AC} = \sqrt{(3-(-3))^2+(4-1)^2} \approx 6,71LE$ Flächeninhalt: $9FE$ Umfang: ca. $15,71LE$

b) $\overline{AC} = \sqrt{(7-2)^2+(4-7)^2} \approx 5,83LE$ Flächeninhalt: $7,5FE$ Umfang: ca. $13,83LE$

c) $\overline{AC} = \sqrt{(2-(-6))^2+(-5-3)^2} \approx 11,31LE$ Flächeninhalt: $32FE$ Umfang: ca. $27,31LE$

d) $\overline{AC} = \sqrt{(7-(-4))^2+(4-(-6))^2} \approx 14,87LE$ Flächeninhalt: $55FE$ Umfang: ca. $35,87LE$

e) $\overline{AC} = \sqrt{(-2-(-7))^2+(-1-(-3))^2} \approx 5,39LE$ Flächeninhalt: $5FE$ Umfang: ca. $12,39LE$

f) $\overline{AC} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}LE$ Flächeninhalt: $\overline{AB}\cdot\overline{BC} = |(x_2-x_1)\cdot(y_2-y_1)|FE$

Umfang: $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC} = (x_2-x_1)+(y_2-y_1)+\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}LE$

Aufgabe 4 (4 BE)

Entscheiden Sie in den letzten vier Fällen mithilfe des Satzes des Pythagoras, ob das $\triangle ABC$ jeweils rechtwinklig, stumpfwinklig oder spitzwinklig ist.

Dies ist die sogenannte Umkehrung des Satzes des Pythagoras, also wenn die Summe der Kathetenquadrate das Hypotenusenquadrat ergibt, muss das Dreieck rechtwinklig sein.

a	b	c	Dreiecksart
8 cm	6 cm	10 cm	$(6\text{cm})^2 + (8\text{cm})^2 = (10\text{cm})^2 \Rightarrow$ rechtwinklig
7 m	9 m	11 m	$(7\text{m})^2 + (9\text{m})^2 > (11\text{m})^2 \Rightarrow$ spitzwinklig
3 cm	4 cm	6 cm	$(3\text{cm})^2 + (4\text{cm})^2 < (6\text{cm})^2 \Rightarrow$ stumpfwinklig
13 dm	5 dm	12 dm	$(5\text{dm})^2 + (12\text{dm})^2 = (13\text{dm})^2 \Rightarrow$ rechtwinklig
23 mm	17 mm	29 mm	$(17\text{mm})^2 + (23\text{mm})^2 < (29\text{mm})^2 \Rightarrow$ stumpfwinklig
5 km	4 km	3 km	$(3\text{km})^2 + (4\text{km})^2 = (5\text{km})^2 \Rightarrow$ rechtwinklig
8 m	12 m	11 m	$(8\text{cm})^2 + (11\text{cm})^2 > (12\text{cm})^2 \Rightarrow$ spitzwinklig

Aufgabe 5 (3 BE)

Eine Stehleiter ist zusammengeklappt 2,10 m lang. Wenn sie aufgestellt ist, sind die Fußenden 1,40 m weit voneinander entfernt. Berechnen Sie, wie hoch die Leiter reicht.

geg.: $c = 2,1$ m; $b = 0,7$ m ges.: a

Lsg.: $c^2 - b^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{c^2 - b^2} = a \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(2,1\text{m})^2 - (0,7\text{m})^2} = a \quad \Leftrightarrow \quad a \approx 1,98$ m

Antwortsatz: Die Leiter reicht 1,98 m hoch.

Aufgabe 6 (3 BE)

Kontrollieren Sie die angegebene Formel und berichtigen Sie ggf.

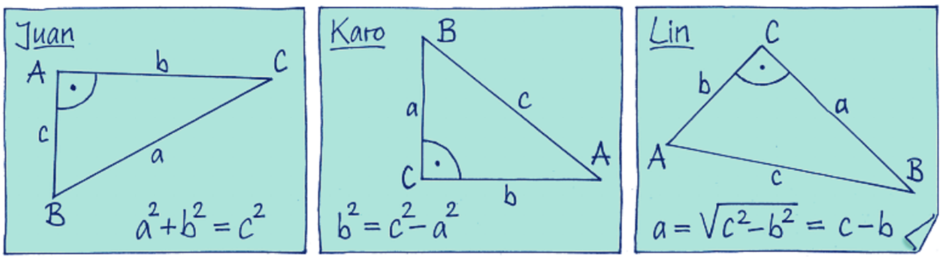

Abbildung 1: (Quelle: Elemente der Mathematik (2016). Sachsen 9, S. 123.)

Juan: Er hat gar nicht geschaut, wo die Hypotenuse ist, sondern den normalen Satz des Pythagoras hingeschrieben. Es müsste heißten: $b^2 + c^2 = a^2$

Karo: Sie hat eine richtige Formel hingeschrieben, da c die Hypotenuse ist und a, b Katheten.

Lin: Die Formel $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ stimmt, aber $\sqrt{c^2 - b^2} = c - b$ ist grober Unfug...

Aufgabe 7 (3 BE)

Berechnen Sie die Mantelfläche und das Volumen einer quadratischen Pyramide mit $a = 6$ m und $h = 5$ m.

Für das Volumen gilt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (6\text{m})^2 \cdot 5\text{m} = 60\text{m}^3$$

Die Mantelfläche besteht aus vier gleichschenkligen Dreiecken, deren Höhe h_s jedoch noch berechnet werden muss, durch:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = h_s^2$$

$$h_s = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{(3\text{m})^2 + (5\text{m})^2} = \sqrt{34}\text{m} \approx 5,83\text{m}$$

Damit ist die Mantelfläche also:

$$A_M = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = 2 \cdot 6\text{m} \cdot \sqrt{34}\text{m} \approx 69,97\text{m}^2$$

Aufgabe 8 (6 BE)

Leiten Sie die Flächeninhaltsformel für das gleichseitige Dreieck A_3 und für das regelmäßige Sechseck A_6 mit Seitenlänge a her. Machen Sie dafür auch eine erläuternde Skizze.

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \qquad A_6 = \frac{3}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$$

Für gilt für den Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

Da alle Seiten bei dem gleichseitigen Dreieck gleich lang sind, gilt also die Formel:

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

Es gilt also h_a, die Höhe auf a, zu ermitteln. Aus einer erläuternden Skizze kann man entnehmen, dass gelten muss:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (h_a)^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{4} + (h_a)^2 = a^2 \quad \overset{-\frac{1}{4}a^2}{\Leftrightarrow} \quad (h_a)^2 = \frac{3}{4}a^2 \quad \Leftrightarrow \quad h_a = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

Wird das in die Formel von A_3 eingesetzt, so erhält man:

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

Ein regelmäßiges Sechseck besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken, wie eine erläuternde Skizze zeigt. Deshalb gilt also die Formel:

$$A_6 = 6 \cdot A_3 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{3}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$$

Aufgabe 9 (2 + 6 BE)

Ein Quader ist durch die Kantenlängen a, b, c gegeben.

a) Leiten Sie die Formel für die Länge d der Raumdiagonale her.

Für die Diagonale der Seitenfläche zwischen a und b gilt:

$$a^2 + b^2 = (d_{a,b})^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad d_{a,b} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Nun wendet man für die Raumdiagonale erneut den Satz des Pythagoras an:

$$(d_{a,b})^2 + c^2 = d^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + c^2 = d^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 = d^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

b) Berechnen Sie die Längen der Diagonalen der Seitenflächen sowie die Länge der Raumdiagonale eines Quaders mit:

(a) $a = 7$ cm; $b = 5$ cm; $c = 4$ cm

$$d_{a,b} = \sqrt{(7\text{cm})^2 + (5\text{cm})^2} = \sqrt{74}\text{cm} \approx 8,60\text{cm}$$
$$d_{b,c} = \sqrt{(5\text{cm})^2 + (4\text{cm})^2} = \sqrt{41}\text{cm} \approx 6,40\text{cm}$$
$$d_{a,c} = \sqrt{(7\text{cm})^2 + (4\text{cm})^2} = \sqrt{65}\text{cm} \approx 8,06\text{cm}$$
$$d = \sqrt{(7\text{cm})^2 + (5\text{cm})^2 + (4\text{cm})^2} = \sqrt{90}\text{cm} \approx 9,49\text{cm}$$

(b) $a = 6,4$ cm; $b = 8,9$ cm; $c = 1,9$ cm

$$d_{a,b} = \sqrt{(6,4\text{cm})^2 + (8,9\text{cm})^2} \approx 10,96\text{cm}$$
$$d_{b,c} = \sqrt{(8,9\text{cm})^2 + (1,9\text{cm})^2} \approx 9,10\text{cm}$$
$$d_{a,c} = \sqrt{(6,4\text{cm})^2 + (1,9\text{cm})^2} \approx 6,68\text{cm}$$
$$d = \sqrt{(6,4\text{cm})^2 + (8,9\text{cm})^2 + (1,9\text{cm})^2} \approx 11,13\text{cm}$$

(c) $a = 5$ cm; $b = 5$ cm; $c = 7$ cm

$$d_{a,b} = \sqrt{(5\text{cm})^2 + (5\text{cm})^2} = \sqrt{50}\text{cm} \approx 7,07\text{cm}$$
$$d_{b,c} = \sqrt{(5\text{cm})^2 + (7\text{cm})^2} = \sqrt{74}\text{cm} \approx 8,60\text{cm}$$
$$d_{a,c} = \sqrt{(5\text{cm})^2 + (7\text{cm})^2} = \sqrt{74}\text{cm} \approx 8,60\text{cm}$$
$$d = \sqrt{(5\text{cm})^2 + (5\text{cm})^2 + (7\text{cm})^2} = \sqrt{99}\text{cm} \approx 9,95\text{cm}$$

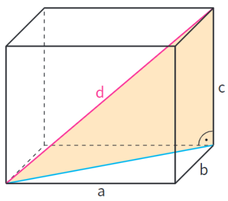

Abbildung 2: (Quelle: Elemente der Mathematik (2016). Sachsen 9, S. 131.)