Aufgaben zu Potenzfunktionen 01 (24.08.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (8 BE)

Schreiben Sie die nachfolgenden Potenzen ohne CAS um.

a) ohne negativen Exponenten (2 BE):

$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{4^2}{3^2}$ $\quad \frac{1}{y^{-\frac{1}{2}}} = y^{\frac{1}{2}}$ $\quad (2 \cdot x \cdot y)^{-4} = \frac{1}{(2\cdot x\cdot y)^4}$

b) in Wurzelschreibweise (0,5+0,5+1+1 BE):

$x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$ $\quad y^{\frac{7}{2}} = \sqrt{x^7}$ $\quad \frac{6^4 \cdot 5^3}{6^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{15}{6}}} = 6^{\frac{10}{3}} \cdot 5^{\frac{3}{6}} = \sqrt[3]{6^{10}} \cdot \sqrt{5}$

$4^{-\frac{12}{5}} \cdot x^{\frac{7}{8}} \cdot 4^5 \cdot x^{-\frac{4}{5}} = 4^{\frac{13}{5}} \cdot x^{\frac{3}{40}} = \sqrt[5]{4^{13}} \cdot \sqrt[40]{x^3}$

c) als Potenz mit rationalem Exponenten (0,5+1+0,5+1 BE):

$\sqrt[8]{x^6} = x^{\frac{3}{4}}$ $\quad \frac{\sqrt[3]{y^9}}{\sqrt[3]{y^6}} = y$ $\quad \sqrt{x-2} = (x-2)^{\frac{1}{2}}$ $\quad \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^6}} = x^{\frac{1}{2}}$

Aufgabe 2 (8 BE)

Füllen Sie die Wertetabellen für die nachfolgenden Funktionen mithilfe des CAS aus:

- $f(x) = 3 \cdot (x-2)^{-2}$
- $g(x) = \frac{1}{5} \cdot (x+3)^{\frac{3}{2}}$
- $h(x) = \sqrt[4]{x^3} - 4$
- $k(x) = \frac{2}{7} \cdot \sqrt[3]{x-2}$

Runden Sie dabei auf 3 Nachkommastellen.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	3	undef.	3
$g(x)$	0	$\frac{1}{5}$	$0,566$	$1,039$	$\frac{8}{5}$	$2,236$	$2,939$
$h(x)$	undef.	undef.	undef.	-4	-3	$-2,318$	$-1,720$
$k(x)$	undef.	undef.	undef.	undef.	undef.	0	$\frac{2}{7}$

Aufgabe 3 (8 BE)

Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich für die Funktionen in Aufgabe 2 an. Sie können für den Wertebereich dabei auch das Grafikmenu Ihres CAS nutzen.

Definitionsbereich

$f(x) : x \in \mathbb{R}, x \neq 2$
$g(x) : x \in \mathbb{R}, x \geqq -3$
$h(x) : x \in \mathbb{R}, x \geqq 0$
$k(x) : x \in \mathbb{R}, x \geqq 2$

Wertebereich

$f(x) : y \in \mathbb{R}, y > 0$
$g(x) : y \in \mathbb{R}, y \geqq 0$
$h(x) : y \in \mathbb{R}, y \geqq -4$
$k(x) : y \in \mathbb{R}, y \geqq 0$

Aufgabe 4 (10 BE)

Geben Sie ohne CAS zwei Potenzfunktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ mit folgenden Eigenschaften an:

a) Die Funktion ist achsensymmetrisch.

z.B. $f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = x^4 \quad f_3(x) = \frac{1}{x^2} \quad f_4(x) = \frac{1}{x^4}$

b) Die Funktion ist punktsymmetrisch und geht durch die Punkte $P_1(-1|-1)$ und $P_2(1|1)$.

z.B. $f_1(x) = \frac{1}{x^3} \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad f_3(x) = \frac{1}{x^5} \quad f_4(x) = \frac{1}{x^7}$

c) Die Funktion hat den Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}; x \neq 3$.

z.B. $f_1(x) = \frac{1}{x-3} \quad f_2(x) = \frac{2}{x-3} \quad f_3(x) = \frac{3}{x-3} \quad f_4(x) = \frac{4}{x-3}$

d) Die Funktion hat den Wertebereich $y \geqq -2$.

z.B. $f_1(x) = x^2 - 2 \quad f_2(x) = x^4 - 2 \quad f_3(x) = x^6 - 2 \quad f_4(x) = x^8 - 2$

e) Die Funktion hat eine waagerechte Asymptote $y = 3$.

z.B. $f_1(x) = \frac{1}{x} + 3 \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2} + 3 \quad f_3(x) = \frac{1}{x^3} + 3 \quad f_4(x) = \frac{1}{x^4} + 3$

Aufgabe 5 (12 BE)

Berechnen Sie die Lösungen der Gleichungen. Geben Sie dazu einen Ansatz zur Berechnung an und bestimmen anschließend das Ergebnis mithilfe des CAS.

a) $4 = \sqrt[3]{8 \cdot x}$

$4^3 = 8x \quad \Rightarrow \quad \frac{4^3}{8} = x \quad \Rightarrow \quad x = 8$

b) $(x-5)^3 = 7$

$\sqrt[3]{7} = x - 5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{7} + 5 = x \quad \Rightarrow \quad x \approx 6,913$

c) $(x+4)^2 = -x^2 - 4 \cdot x + 9$

$x^2 + 8x + 16 = -x^2 - 4x + 9$ umformen ergibt: $2x^2 + 12x + 7 = 0$
in Normalform: $x^2 + 6x + 3,5 = 0$
p-q-Formel anwenden ergibt: $x_1 \approx -5,345$ und $x_2 \approx -0,655$

d) $x^{\frac{7}{4}} = 2,3$

$\sqrt[4]{x^7} = 2,3 \quad \Rightarrow \quad x^7 = (2,3)^4 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[7]{(2,3)^4} \quad \Rightarrow \quad x \approx 1,610$

e) $x^5 - 12 = 4$

$x^5 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[5]{16} \quad \Rightarrow \quad x \approx 1,741$

f) $\sqrt{(x+5)^3} - 8 = 9$

$\sqrt{(x+5)^3} = 17 \quad \Rightarrow \quad (x+5)^3 = 17^2 \quad \Rightarrow \quad x+5 = \sqrt[3]{289} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{289} - 5$

$\Rightarrow \quad x \approx 1,611$