LEHRBUCH DER
MATHEMATIK

NEUNTES SCHULJAHR

LEHRBUCH
DER
MATHEMATIK

FÜR DIE OBERSCHULE

9. SCHULJAHR

Mit 306 Abbildungen

VOLK UND WISSEN VERLAG
BERLIN/LEIPZIG
1951

INHALTSVERZEICHNIS

ARITHMETIK, ALGEBRA UND ANALYSIS

A. Die quadratische Funktion und die quadratische Gleichung

B. Die Potenzfunktion und ihre Umkehrung

a) Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

b) Potenzen mit gebrochenen Exponenten

C. Die Exponentialfunktion und ihre Umkehrung

GEOMETRIE

D. Ähnlichkeit

E. Geometrie der Lage

F. Abbildung durch Parallelprojektion

Anhang

III. Die Ellipse als Bild eines Kreises in schräger Parallelprojektion

7. Begründe den Satz: Zu jedem konjugierten Durchmesserpaar gehört eine Ellipse!

Anleitung (Abb. 270): Laß Durchmesser AB konstant und verändere den konjugierten Durchmesser $C'D'$, ($C'D' < AB$), a) in seiner Länge bei gleichbleibender Richtung, (α konstant, q veränderlich), b) in seiner Richtung bei gleichbleibender Länge, (α veränderlich, q konstant). Jedem Fall entspricht ein Bild des Kreises mit dem Durchmesser AB in schräger Parallelprojektion bei wechselnden Verzerrungen.

8. Zeichne eine Ellipse als Bild eines Kreises in schräger Parallelprojektion aus einem Paar konjugierter Durchmesser für die Verzerrungen **a)** $\alpha = 30°$, $q = \frac{1}{2}$; **b)** $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{3}$; **c)** $\alpha = 60°$, $q = \frac{1}{3}$!

Anleitung (Abb. 271): Was wird bei der Abbildung durch schräge Parallelprojektion aus dem umbeschriebenen Quadrat des Kreises im Ellipsenbild?

9. Zeichne eine Ellipse als Bild eines Kreises in schräger Parallelprojektion aus den Achsen für die Verzerrung $\alpha = 90°$ und **a)** $q = \frac{1}{2}$, **b)** $q = \frac{1}{3}$, **c)** $q = \frac{1}{4}$!

Anleitung (Abb. 268 und 272): Was wird in diesem Fall der Abbildung aus dem umbeschriebenen Quadrat des Kreises im Ellipsenbild? Können sich Kreis und Ellipse überschneiden?

10. Wo liegen die Teilpunkte 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, ..., 180° einer Kreislinie bei Abbildung durch schräge Parallelprojektion mit der Verzerrung **a)** $\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{3}$, **b)** $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ (Abb. 273)?

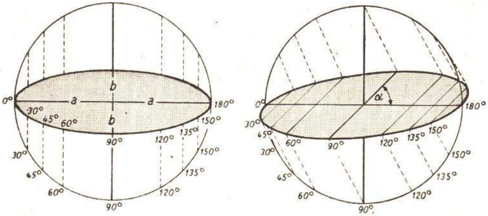

Abb. 273

37. Drehkörper: Gerader Zylinder und gerader Kegel

a) Der Zylinder

1. Der gerade Zylinder als Drehkörper

Dreht man ein Rechteck von den Seiten $2r$ und s um eine Symmetrieachse, so entsteht ein **gerader Zylinder** (Abb. 274). Die Drehachse wird **Körperachse.** Die Seite s (parallel der Achse) erzeugt bei der Drehung die krumme **Mantelfläche** des Zylinders als Drehfläche, die Seiten $2r$ (senkrecht zur Achse) erzeugen die kreisförmige **Grundfläche** und die kreisförmige **Deckfläche** des Zylinders. Die Fläche des Rechtecks erzeugt den **Zylinderkörper** als Drehkörper. s ist eine **Mantellinie** des Zylinders; sie ist gleich der **Höhe** h des Zylinders.

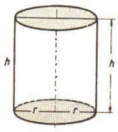

Abb. 274

Die Körperachse ist eine **Symmetrieachse** des Zylinders, jede Drehung des Körpers um sie bringt diesen mit sich selbst zur Deckung. Jede Ebene durch die Zylinder-

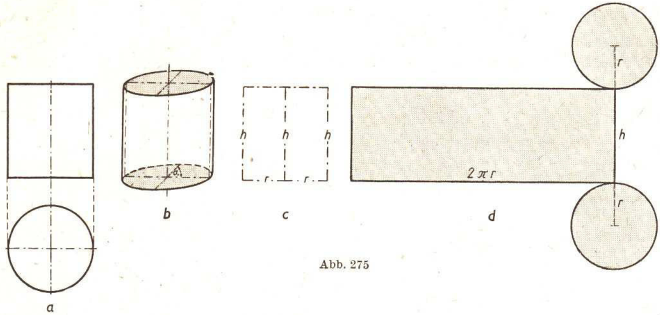

Abb. 275

achse ist Symmetrieebene des Zylinders. Jeder ebene Schnitt durch die Körperachse ergibt einen **Achsenschnitt** des Zylinders als Schnittfigur. Jeder Achsenschnitt eines geraden Zylinders ist ein Rechteck mit der Mantellinie $s = h$ und dem Grundkreisdurchmesser $2r$ als Seiten (Abb. 275c).
Jeder Zylinder ist zentrisch-symmetrisch zum gemeinsamen Mittelpunkt M aller seiner Achsenschnitte. Jeder Zylinder hat einen Mittelpunkt M.
Die krumme Mantelfläche eines geraden Zylinders ist **in die Ebene abwickelbar.** Der abgewickelte Zylindermantel ist ein Rechteck mit den Seiten h und $2\pi r$. In Abb. 275d ist die Abwicklung eines geraden Zylinders in die Ebene gezeichnet, aus ihr läßt sich ein Flächenmodell des Körpers herstellen.

2. Geometrische Darstellung eines geraden Zylinders

In Abb. 275a ist ein gerader Zylinder im Grund- und Aufriß geometrisch dargestellt. Abb. 274 zeigt das Bild eines geraden Zylinders in schräger Parallelprojektion für die Verzerrung $\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{3}$, Abb. 275b für $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$.

3. Berechnung des Zylinders

Rauminhalt des Zylinders. Wir vergleichen einen geraden Zylinder mit einem quadratischen Prisma gleichen Grundflächeninhalts πr^2 und gleicher Höhe h (Abb. 276, Aufg. 9). Beide Körper werden durch jede Parallelebene zur Grundebene ε in inhaltsgleichen Flächen geschnitten. Nach dem Cavalierischen Lehrsatz sind ihre Rauminhalte gleich, es ist

$$V = G \cdot h.$$

Der Rauminhalt eines Zylinders ist $V = \pi r^2 \cdot h$.

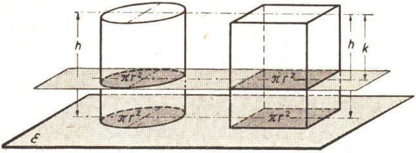

Abb. 276

Mantelfläche und Oberfläche des geraden Zylinders (Abb. 275d).

Der Mantel eines geraden Zylinders ist $M = 2\pi r h$, seine Oberfläche $O = 2\pi r h + 2\pi r^2$. Hierin ist r der Grundkreisradius und h die Höhe des Zylinders.

Gerade und schiefe Zylinder. Die bisherigen Ergebnisse sind für gerade Zylinder abgeleitet worden. Bei geraden Zylindern steht die Zylinderachse senkrecht auf der Zylindergrundfläche. Steht die Zylinderachse schief zur Zylindergrundfläche, so erhält man einen schiefen Zylinder (Abb. 277). Die Formel für den Rauminhalt V eines Zylinders gilt auch für schiefe Zylinder. Gib eine Begründung dafür (Abb. 277)! Die Formeln für den Mantel M und die Oberfläche O eines geraden Zylinders gelten nicht für schiefe Zylinder.

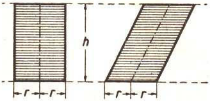

Abb. 277

Die betrachteten Zylinder sind Kreiszylinder. Es gibt noch weitere Zylinder, z. B. elliptische Zylinder (Aufgabe 48).

b) Der Kegel

1. Der gerade Kegel als Drehkörper

Dreht man ein gleichschenkliges Dreieck von der Basis $2r$, den Schenkeln s und der Höhe h um seine Symmetrieachse, so entsteht ein **gerader Kegel** (Abb. 278). Die Drehachse wird **Körperachse** des Kegels. Die Schenkel s des Dreiecks erzeugen bei der Drehung die krumme **Mantelfläche** des Kegels, die Basis $2r$ erzeugt die **Grundfläche** des Kegels oder seinen **Grundkreis.** Die Fläche des Dreiecks erzeugt den **Kegelkörper** als Drehkörper. s ist eine **Mantellinie** des Kegels, S seine **Spitze,** h die **Höhe** des Kegels.

Die Körperachse ist die **Symmetrieachse** des Kegels. Jede Drehung um sie bringt den Körper mit sich selbst zur Deckung. Jede Ebene durch die Kegelachse ist eine Symmetrieebene, jeder ebene Schnitt durch die Kegelachse ergibt einen **Achsenschnitt** des Kegels.

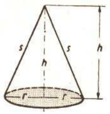

Abb. 278

Jeder Achsenschnitt eines geraden Kegels ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $2r$, den Schenkeln s (Mantellinie des Kegels) und der Höhe h.

Die krumme Mantelfläche eines geraden Kegels ist **in die Ebene abwickelbar.** Der abgewickelte Kegelmantel ist ein Kreissektor mit dem Radius s und der Bogenlänge $b = 2\pi r$ (Abb. 279d). Die Abwicklung eines geraden Kegels in die Ebene ist in Abb. 279d gezeichnet; aus ihr läßt sich ein Flächenmodell des Körpers herstellen.

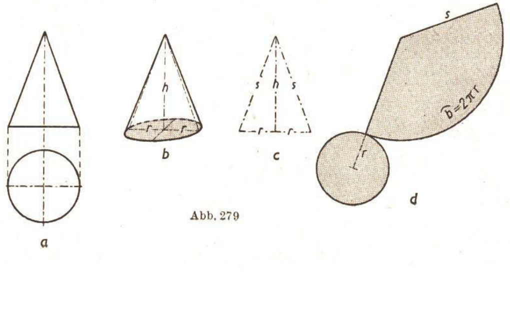

Abb. 279

2. Geometrische Darstellung eines geraden Kegels

In den Abb. 278 und 279a, b sind die Bilder eines geraden Kegels im Grund- und Aufriß und in schräger Parallelprojektion für die Verzerrungswinkel $\alpha = 90°$ und $\alpha = 45°$ dargestellt.

3. Berechnung des Kegels

Rauminhalt des Kegels. Wir vergleichen einen geraden Kegel mit einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide gleichen Grundflächeninhalts πr^2 und gleicher Höhe h (Abb. 280; Aufg. 22). Beide Körper werden durch jede Parallelebene zur Grundebene ε in inhaltsgleichen Flächen geschnitten, nach dem Cavalierischen Lehrsatz sind ihre Rauminhalte gleich, es ist

$$V = \tfrac{1}{3} G \cdot h.$$

Der Rauminhalt eines Kegels ist

$$V = \tfrac{1}{3} \pi r^2 \cdot h.$$

Hierin ist r der Grundkreisradius und h die Höhe des Kegels.

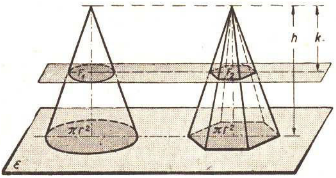

Abb. 280

Mantelfläche und Oberfläche des geraden Kegels (Abb. 279 d).

Der Mantel eines geraden Kegels ist $M = \dfrac{b \cdot s}{2} = \pi r s$, **seine Oberfläche** $O = \pi r s + \pi r^2$.

Hierin ist r der Grundkreisradius und s die Mantellinie des Kegels.

Gerade und schiefe Kegel. Die bisherigen Ergebnisse sind für gerade Kegel abgeleitet worden. Bei geraden Kegeln steht die Kegelachse senkrecht auf der Kegelgrundfläche. Steht die Kegelachse schief zur Kegelgrundfläche, so erhält man einen schiefen Kegel (Abb. 281). Die Formel für den Rauminhalt V eines Kegels gilt auch für schiefe Kegel. Gib eine Begründung dafür! Die Formeln für die Mantelfläche M und die Oberfläche O eines geraden Kegels gelten nicht für schiefe Kegel.
Die betrachteten Kegel sind Kreiskegel.

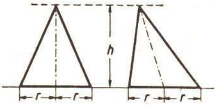

Abb. 281

Aufgaben

I. Der Zylinder

1. Schneide aus Pappe Rechtecke verschiedener Form und Größe und drehe die Rechtecke um eine Symmetrieachse! Welche Drehkörper entstehen?

2. Wie kann man auf der Drehbank einen zylindrischen Körper herstellen? Welche Symmetrieeigenschaften hat ein gerader Zylinder?

3. Stelle Zylinder von quadratischem Achsenschnitt durch Drehung her! Wie verhalten sich Grundkreisradius und Höhe zueinander?

4. Stelle einen lotrecht stehenden Zylinder **a)** mit rechteckigem, **b)** mit quadratischem Achsenschnitt im Grund- und Aufriß geometrisch dar!

5. Zeichne das Bild eines Zylinders mit rechteckigem bzw. quadratischem Achsenschnitt in schräger Parallelprojektion für die folgenden Verzerrungen:

a) $\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{2}$ **b)** $\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{3}$

c) $\alpha = 30°$, $q = \frac{1}{2}$ **d)** $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ **e)** $\alpha = 60°$, $q = \frac{1}{3}$!

Welche Darstellungen entsprechen am meisten unserer Raumanschauung von Drehkörpern? Welche sind zeichnerisch am einfachsten (Abb. 274 und 275 b)?

6. Zeichne die Abwicklung eines geraden Zylinders **a)** von rechteckigem, **b)** von quadratischem Achsenschnitt in die Ebene und stelle Modelle der Zylinder her! Wie sehen die abgewickelten Mantelflächen der Zylinder aus?

7. Zeichne auf die abgewickelte Mantelfläche eines geraden Zylinders **a)** von rechteckigem, **b)** von quadratischem Achsenschnitt eine Schar von Mantellinien und senkrecht dazu eine zweite Schar paralleler Gerader! Was ergeben die beiden Parallelenscharen auf dem aufgewickelten Zylindermantel? Bleibt der rechtwinklige Schnitt der beiden Kurvenscharen bei Aufwicklung des Mantels erhalten?

8. Zeichne auf die Mantelfläche eines geraden, lotrecht stehenden Kreiszylinders eine Schar von Höhenlinien und eine Schar von Fallinien! Beide Scharen schneiden sich auf jeder Fläche rechtwinklig. Was ergeben beide Kurvenscharen bei Abwicklung des Zylindermantels in die Ebene?

9. Ein gerader Kreiszylinder vom Grundkreisradius r und der Höhe h und eine gerade quadratische Säule haben gleiche Grundflächeninhalte und gleiche Höhen. Wir stellen beide Körper auf eine Grundebene ε (Abb. 276).

a) Wie groß ist die Grundkante der quadratischen Säule?

b) Wie verhalten sich die Schnittflächen beim Schnitt beider Körper in gleicher Höhe parallel zur Grundebene? Wie verhalten sich die Rauminhalte beider Körper?

10. Berechne Rauminhalt, Mantel und Oberfläche eines Zylinders mit quadratischem Achsenschnitt und dem Grundkreisradius r!

11. Die Achse eines schiefen Kreiszylinders vom Grundkreisradius r und der Höhe h ist unter 45° gegen die Grundfläche geneigt.

a) Zeichne einen Achsenschnitt, Grund- und Aufriß und ein Bild des Körpers in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{3}$)! **b)** Wie groß ist der Rauminhalt des schiefen Zylinders?

12. Die in der Technik benutzten Formeln für den Rauminhalt und den Mantel eines geraden Zylinders benutzen an Stelle des Grundkreisradius r oft den leichter meßbaren Durchmesser $d = 2r$. Wie heißen dann die Formeln für V, M und O des geraden Zylinders?

13. Stelle Höhe, Mantel und Rauminhalt eines Zylinders mit quadratischem Achsenschnitt als Funktionen **a)** des Grundkreisradius, **b)** des Grundkreisdurchmessers analytisch und zeichnerisch in gemeinsamen Achsenkreuzen dar!

II. Der Kegel

14. Schneide aus Pappe gleichschenklige Dreiecke verschiedener Form und Größe und drehe die Dreiecke um ihre Symmetrieachse! Welche Körper entstehen?

15. Wie kann man auf der Drehbank einen kegelförmigen Körper herstellen? Welche Symmetrieeigenschaften hat ein gerader Kegel?

16. Stelle Kegel von gleichseitigem Achsenschnitt durch Drehung her! Wie drücken sich Mantellinie s und Höhe h dieser Kegel durch ihren Grundkreisradius r analytisch aus?

17. Stelle einen lotrecht stehenden Kegel **a)** mit gleichschenkligem ($s = 3r$), **b)** mit gleichseitigem Achsenschnitt im Grund- und Aufriß geometrisch dar!

18. Zeichne die Bilder der geraden Kegel aus Aufgabe 17 in schräger Parallelprojektion für die folgenden Verzerrungen:

a) $\alpha = 90°; q = \frac{1}{2}$ **b)** $\alpha = 90°; q = \frac{1}{3}$

c) $\alpha = 30°; q = \frac{1}{2}$ **d)** $\alpha = 45°; q = \frac{1}{2}$ **e)** $\alpha = 60°; q = \frac{1}{3}$!

Welche Darstellungen entsprechen am meisten unserer Raumanschauung von Drehkörpern? Welche sind zeichnerisch am einfachsten?

19. Zeichne die Abwicklungen der Kegel aus Aufgabe 17 in die Ebene und stelle Modelle der Körper her! Wie sehen die abgewickelten Mantelflächen der Kegel aus?

20. Zeichne auf den abgewickelten Mantel eines geraden Kegels, **a)** dessen Höhe, **b)** dessen Mantellinie gleich dem Grundkreisdurchmesser ist, je eine Schar von Mantellinien und eine Schar von Kreisbögen um die Kegelspitze S! Beide Linienscharen schneiden einander rechtwinklig (warum?). Was ergeben die beiden Linienscharen auf den aufgewickelten Kegelmänteln? Bleibt der rechtwinklige Schnitt der beiden Kurvenscharen bei Aufwicklung der Mäntel erhalten?

21. Zeichne auf die Mantelfläche eines geraden Kegels eine Schar von Höhenlinien und eine Schar von Fallinien! Beide Scharen schneiden sich auf jeder Fläche rechtwinklig. Was ergeben beide Kurvenscharen bei Abwicklung des Kegelmantels in die Ebene?

22. Ein gerader Kreiskegel vom Grundkreisradius r und der Höhe h und eine gerade sechsseitige Säule haben gleiche Grundflächeninhalte und gleiche Höhen. Wir stellen beide Körper auf eine Grundebene ε (Abb. 280).

a) Wie groß ist die Grundkante der sechsseitigen Säule?

b) Wie verhalten sich die Schnittflächen beim Schnitt beider Körper in gleicher Höhe parallel zur Grundebene?

c) Wie verhalten sich die Rauminhalte beider Körper?

23. Berechne Rauminhalt, Mantel und Oberfläche

a) eines Kegels mit gleichseitigem Achsenschnitt und dem Grundkreisradius r,

b) eines geraden Kegels mit der Höhe $h = r$!

24. Die Achsenschnitte dreier Kegel von gleichen Grundflächen sind **a)** ein gleichseitiges, **b)** ein gleichschenkliges, **c)** ein ungleichseitiges Dreieck. Zeichne die Grund- und Aufrisse und die Bilder der Kegel in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{3}$)! Welche Kegel sind gerade, welches sind schiefe Kegel? Wie groß ist der Rauminhalt des schiefen Kegels?

25. Die in der Technik benutzten Formeln für den Rauminhalt und den Mantel eines geraden Kegels enthalten an Stelle des Grundkreisradius r oft den leichter meßbaren Durchmesser $d = 2r$. Wie heißen dann die Formeln für V, M und O des geraden Kegels?

26. Stelle Höhe, Mantel und Rauminhalt eines Kegels von gleichseitigem Achsenschnitt als Funktionen

a) des Grundkreisradius r, **b)** des Grundkreisdurchmessers d

analytisch und geometrisch in einem gemeinsamen Achsenkreuz dar!

III. Vermischte Aufgaben

27. Einem Kegel von gleichseitigem Achsenschnitt und dem Grundkreisradius r ist eine regelmäßige **a)** dreiseitige, **b)** vierseitige, **c)** sechsseitige Pyramide gleicher Höhe einbeschrieben. Wie groß sind die Grundkanten und Rauminhalte der Pyramiden? Wie verhalten sich die Rauminhalte des Kegels und der Pyramiden?

Anleitung: Zeichne die beiden ineinanderliegenden Körper in zweckmäßiger Lage im Grund- und Aufriß und in einem für die Berechnung zweckmäßigen Schnitt!

28. Einem Kegel von gleichseitigem Achsenschnitt und dem Grundkreisradius r ist eine regelmäßige **a)** dreiseitige, **b)** vierseitige, **c)** sechsseitige Pyramide gleicher Höhe umbeschrieben. Wie groß sind die Grundkanten und Rauminhalte der Pyramiden? Wie verhalten sich die Rauminhalte des Kegels und der Pyramiden?

29. Einem Kegel von gleichseitigem Achsenschnitt und dem Grundkreisradius r ist ein Zylinder von quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben. Wie groß sind Grundkreisradius (ϱ) und Rauminhalt des Zylinders? Wie verhalten sich die Rauminhalte von Kegel und Zylinder?

Anleitung: Stelle die beiden ineinanderliegenden Körper im Grund- und Aufriß und in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{3}$) geometrisch dar! Zeichne einen Achsenschnitt der beiden ineinanderliegenden Körper!

30. Einem Oktaeder mit der Grundkante a ist **a)** ein Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt, **b)** ein gerader symmetrischer Doppelkegel mit gemeinsamer Spitze und gleichseitigem Achsenschnitt einbeschrieben. Wie groß sind Grundkreisradius und Rauminhalt der einbeschriebenen Körper? Wie verhalten sich die Rauminhalte der ineinanderliegenden Körper?

31. Einem Tetraeder mit der Grundkante a ist ein Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben. Wie groß sind Grundkreisradius und Rauminhalt des Zylinders? Wie verhalten sich die Rauminhalte beider Körper?

IV. Angewandte Aufgaben

32. Ein zylindrisches Standglas soll als Meßzylinder geeicht werden. Der Boden des Standglases ist eben, sein lichter Durchmesser beträgt 26 mm.

a) Wie hängt der Inhalt der Zylinderfüllung vom Bodenabstand des Flüssigkeitsspiegels ab?

b) Stelle diese Abhängigkeit geometrisch dar und entnimm dem Funktionsbild die Teilung des Zylinders für 5, 10, 15, ..., 100 cm^2!

c) Zeichne ein Bild des Meßzylinders mit Teilung im Aufriß!

33. Ein Gasrohr aus Grauguß von $2\frac{3}{4}$ mm Wanddicke hat einen lichten Durchmesser von $\frac{3}{4}$ Zoll ($\frac{3}{4}''$). Wieviel wiegt ein Meter Gasrohr?

Anleitung: 1 Zoll = 25,4 mm.

34. Wieviel wiegt eine 850 mm lange Stahlwelle vom Durchmesser 125 mm?

35. In der Technik bestimmt man das Gewicht eines laufenden Meters Rundstahl oft durch die Faustformel $G \approx 612\, d^2$, wobei d in cm eingesetzt wird und das Ergebnis in p berechnet ist. Für Überschlagsrechnungen rundet man 612 auf 600. Begründe die Richtigkeit dieser Faustformel!

36. Wieviel wiegen die folgenden Rundstähle:

a) 1 m ○-Stahl 30 mm Durchmesser **b)** 75 m ○-Stahl 35 mm Durchmesser

c) 6,75 m ○-Stahl 45 mm Durchmesser?

37. Lokomotivkessel. Kessel der wichtigsten Lokomotivarten der Deutschen Reichsbahn (Abb. 282). Zwischen der Feuerbuchse und der Rauchkammer liegt der Hauptteil der Kesselanlage, der zylindrische Kessel. Er ist in seinem oberen Teil von Rauchrohren, im unteren Teil von Heizrohren durchzogen.

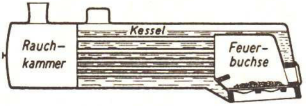

Abb. 282.
Längsschnitt eines Lokomotivkessels, vereinfacht

Bezeichnung der Lokomotiven	Sämtliche Maßangaben in cm							
	Kessel-		Heizrohre			Rauchrohre		
	Länge	Durchmesser	Anzahl	Durchmesser innen	Durchmesser außen	Anzahl	Durchmesser innen	Durchmesser außen
2 C 1-Schnellzuglok.......	580	190	129	4,9	5,4	43	13,5	14,3
2 C 2-Personenzuglok......	470	180	155	4,5	5,0	41	12,5	13,3
1 E Güterzuglok..........	580	190	127	4,9	5,4	43	13,5	14,3

Berechne **a)** den Wasserinhalt des Kessels unter der Annahme, daß drei Viertel des zylindrischen Kesselteils mit Wasser, der restliche Raum mit Dampf gefüllt sind,
b) die Heizfläche (Summe der Oberflächen sämtlicher Heiz- und Rauchrohre)!

38. Dampfzylinder der gleichen Lokomotiven wie in Aufgabe 37:

Bezeichnung der Lokomotiven	Zylinder-Durchmesser cm	Hublänge cm
2 C 1..........	66	66
2 C 2..........	60	66
1 E...........	72	66

Gib den Hubraum für jeden Zylinder an!

39. Wasserschlösser. Zum Ausgleich plötzlich auftretender Druckschwankungen sind in die Druckwasserleitungen des Pumpspeicherwerkes Niederwartha bei Dresden zwei Stahlblechzylinder als Wasserschlösser eingebaut. Ihre Durchmesser betragen 17 m, ihre Höhen 35 m.

a) Wieviel m³ Wasser fassen beide Behälter?

b) Wieviel m² Stahlblech sind zu ihrem Bau verwendet worden?

40. Nahtlose Stahlrohre für hohe Drucke werden aus einem Stück gezogen.

a) Wie lang muß ein Stahlblock von quadratischem Querschnitt ($200 \cdot 200$ mm²) sein, wenn man aus ihm ein 12 m langes Stahlrohr mit einem lichten Durchmesser von 150 mm und einer Wanddicke von 4 mm ziehen will?

b) Aus einem 50 cm langen Stahlblock mit quadratischem Querschnitt ($200 \cdot 200$ mm²) wird ein Stahlrohr mit einer Wanddicke von 5 mm und einem lichten Durchmesser von 120 mm gezogen. Wie lang wird es?

41. Ein Einflammrohr-Dampfkessel ist 450 cm lang und hat einen Durchmesser von 150 cm. Der Durchmesser des Flammrohres beträgt 75 cm und ist aus Stahlblech von 7 mm Stärke gefertigt.

a) Wie groß ist die Heizfläche des Flammrohres?

b) Wie groß ist die für das Flammrohr benötigte Menge Stahlblech und sein Gewicht, wenn für Nieten und Laschen ein Zuschlag von 15% gerechnet wird?

c) Um wieviel vergrößert sich die Heizfläche des Flammrohres, wenn an Stelle von glattem Stahlblech gewelltes Stahlblech verwendet wird (vgl. Abschn. 31, Aufgabe 28)?

d) Zeichne den Dampfkessel in einem Längsschnitt und einem Querschnitt!

42. Eine Boje hat die Form eines Doppelkegels mit gemeinsamer Grundfläche. Ihre Gesamthöhe ist 1,50 m, der Durchmesser der gemeinsamen Kegelgrundfläche ist 0,60 m.

a) Wieviel m^2 Stahlblech werden zu ihrer Herstellung gebraucht (ohne Berücksichtigung der Schweißnähte)?

b) Wie schwer ist die Boje, wenn sie aus Stahlblech von 3 mm Stärke hergestellt ist?

c) Mit welchem Gewicht muß die Boje belastet werden, damit sie zur Hälfte unter Wasser tauchend schwimmt (Wichte von Meerwasser $\gamma = 1{,}02$ p/cm³)?

d) Stelle die Boje im Grund- und Aufriß und in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{4}$) geometrisch dar!

43. Aus einem 75 mm langen runden Messingstab von 20 mm Durchmesser soll ein Senklot hergestellt werden, das die Form einer Walze mit zwei aufgesetzten Kegeln hat. An einem Ende des Messingstabes wird ein Kegel von 20 mm, am andern ein solcher von 5 mm Höhe abgedreht.

a) Wie groß ist der Rauminhalt des Senklotes?

b) Wieviel Abfall entsteht beim Abdrehen der Kegel?

c) Wieviel wiegt das Senklot (Wichte von Messing $\gamma = 8{,}8$ p/cm³)?

d) Zeichne das Senklot in einem Längsschnitt und einem Querschnitt!

44. Ein Silo hat die Form eines Hohlzylinders mit aufgesetztem Kegel. Seine Gesamthöhe beträgt 8 m. Die Höhe des Zylinders ist $\frac{3}{5}$ der Gesamthöhe, sein innerer Durchmesser 4,80 m.

a) Wie groß ist das Fassungsvermögen des Silos?

b) Wieviel m^2 Blech wurden zu seiner Herstellung verbraucht?

c) Wie groß ist sein Gewicht, wenn 5 mm dickes Zinkblech verwendet wurde, von dem 1 m^2 35,9 kp wiegt?

45. Wie groß ist der lichte Durchmesser einer Kapillare, die nach Einfüllung eines 8 cm langen Quecksilberfadens ein Mehrgewicht von 0,268 p aufweist? (Die Wichte des Quecksilbers bei 18° ist $\gamma = 13{,}551$ p/cm³.)

46. Um einen genormten Glastrichter mit Filtrierpapier auszulegen, faltet man einen Kreis (Radius r) aus Filtrierpapier zweimal rechtwinklig, so daß das Papier die Gestalt eines Viertelkreises annimmt, und wölbt das zusammengefaltete Papier zu einem Kegel auf.

a) Welchen Durchmesser hat der Grundkreis des Kegels?

b) Welche Gestalt hat ein Achsenschnitt des Kegels?

c) Welche Gestalt und welchen Öffnungswinkel haben genormte Glastrichter?

d) Wie groß ist das Fassungsvermögen genormter Trichter mit einer Trichterweite von 4,5 cm; 7 cm; 10 cm; 15 cm; 25 cm bei einer Füllung?

e) Als Fassungsvermögen dieser Trichter werden 20 cm³; 75 cm³; 225 cm³; 750 cm³; 3,5 l angegeben. Wie groß sind die relativen Fehler dieser Angaben in Prozenten?

47. Genormte Kochtöpfe aus Aluminium haben nach den DIN-Vorschriften u. a. folgende Abmessungen:

		Flache Form			Hohe Form		
Durchmesser (innen)	d cm	22	24	26	22	24	26
Höhe (außen)	h cm	14	15	16	18,5	20	21,5
Wanddicke	s mm	2,1	2,1	2,2	2,1	2,1	2,2
Angegebener Inhalt	V in l	5,25	6,75	8,5	7	9	11,5

Berechne den Rauminhalt der Gefäße auf 3 Stellen genau! Wie groß ist der relative Fehler der angegebenen Rauminhalte in Prozenten?

48. Eine Gießkanne hat die Form eines geraden Zylinders mit elliptischer Grundfläche, eines elliptischen Zylinders. Die Achsen der elliptischen Grundfläche sind $2a = 24$ cm und $2b = 18$ cm; die Höhe der Gießkanne ist 24 cm (innen gemessen). Ihre Wanddicke ist 3 mm. Ihr Fassungsvermögen ist mit 8 l angegeben.

a) Wie groß ist das Fassungsvermögen der Gießkanne auf 3 Stellen genau?

b) Wie groß ist der relative Fehler des angegebenen Fassungsvermögens in Prozenten?

Anleitung: Der Flächeninhalt einer Ellipse mit den Achsen $2a$ und $2b$ ist $F = \pi ab$.

49. Fässer und Tonnen. Den Rauminhalt von Fässern und Tonnen berechnet man mit guter Annäherung wie den eines Zylinders gleicher Höhe mit mittlerem Faßdurchmesser d_m (Keplersche Faßregel[1]), Abb. 283).

Unter dem mittleren Durchmesser eines Fasses oder einer Tonne versteht man das arithmetische Mittel zwischen dem Bodenkreisdurchmesser d_1 und zwei Spundkreisdurchmessern d_2,

$$d_m = \frac{d_1 + d_2 + d_2}{3} = \frac{d_1 + 2d_2}{3}.$$

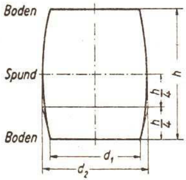

Abb. 283.
Längsschnitt eines Fasses

a) Begründe die Formel für den mittleren Durchmesser d_m eines Fasses!

b) Zeige, daß der mittlere Durchmesser eines Fasses auch $d_m = d_1 + \frac{2}{3}(d_2 - d_1)$ ist!

c) Zeige, daß der mittlere Radius eines Fasses $r_m = \frac{r_1 + 2r_2}{3}$ oder $r_m = r_1 + \frac{2 \cdot (r_2 - r_1)}{3}$ ist!

d) Leite die Näherungsformel für den Rauminhalt eines Fasses ab:

$$V_F \approx \pi r_m{}^2 \cdot h \quad \text{oder} \quad V_F \approx \frac{\pi}{4} d_m{}^2 \cdot h!$$

50. Wieviel Liter fassen die folgenden Fässer:

	a)	b)	c)	d)
Spunddurchmesser d_2	80 cm	55 cm	52 cm	35 cm
Bodendurchmesser d_1	70 cm	47 cm	40 cm	28 cm
Höhe h	100 cm	90 cm	66 cm	55 cm

Die Wanddicke der Fässer ist durchweg 2 cm.

1) Johannes Kepler, 1571—1630, Astronom, Graz, Prag, Linz, Ulm, Regensburg. (Nova stereometria doliorum vinariorum, 1619.)

38. Körperstümpfe

a) Körperstümpfe

Schneidet man einen Körper oberhalb seiner Grundfläche durch eine Ebene, so zerfällt der Vollkörper in zwei Teile, den Körper**stumpf** und den **Ergänzungs**körper dieses Stumpfes. Ein Körperstumpf heißt g e r a d e, wenn der zugehörige Vollkörper gerade ist.

b) Pyramidenstumpf

Schneidet man eine gerade Pyramide durch eine zur Grundfläche p a r a l l e l e Ebene, so zerfällt sie in einen **Pyramidenstumpf** und die Ergänzungspyramide dieses Stumpfes. Die zur Grundfläche parallele Schnittfläche heißt **Deckfläche** des Stumpfes. Der Abstand zwischen Grund- und Deckfläche heißt **Höhe** $\boldsymbol{h}$ des Stumpfes.

1. Geometrische Darstellung eines Pyramidenstumpfes

In Abb. 284 ist ein quadratischer Pyramidenstumpf im Grund- und Aufriß und in schräger Parallelprojektion und die Abwicklung des Stumpfes in die Ebene geometrisch dargestellt. Die Abwicklung läßt sich zu einem Flächenmodell des Körpers zusammenfalten.

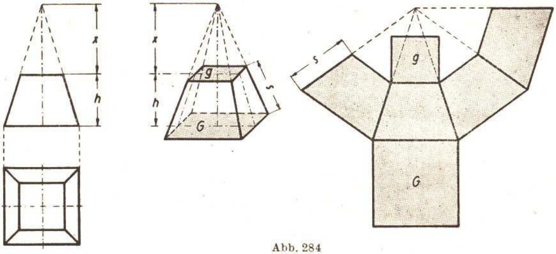

Abb. 284

2. Berechnung des Rauminhalts eines Pyramidenstumpfes

Der Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes ist (Abb. 284)

$$V = \tfrac{1}{3} G \cdot (h + x) - \tfrac{1}{3} g \cdot x,$$
$$V = \tfrac{1}{3} Gh + \tfrac{1}{3} x \cdot (G - g).$$

Die Höhe x der Ergänzungspyramide müssen wir nun anderweitig berechnen und ihren Wert einsetzen. Es verhält sich

$$\frac{G}{g} = \frac{(h + x)^2}{x^2}$$

oder

$$\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}} = \frac{h + x}{x}.$$

Durch korrespondierende Subtraktion oder durch Ausmultiplizieren und Ausklammern von x erhalten wir

$$\frac{\sqrt{G}-\sqrt{g}}{\sqrt{g}}=\frac{h}{x},$$

$$x=\frac{h\cdot\sqrt{g}}{(\sqrt{G}-\sqrt{g})}.$$

Wir machen den Nenner rational, $x=\dfrac{h\cdot\sqrt{g}\cdot(\sqrt{G}+\sqrt{g})}{G-g}$.

Diesen Wert von x setzen wir in die Gleichung für V ein und erhalten

$$V=\frac{1}{3}\,Gh+\frac{1}{3}\,h\sqrt{g}\cdot(\sqrt{G}+\sqrt{g})=\frac{h}{3}\,(G+\sqrt{Gg}+g).$$

Der Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes ist $\boldsymbol{V=\dfrac{h}{3}\,(G+\sqrt{Gg}+g)}$.

$V=\frac{h}{6}(G+g+4M)$

c) Kegelstumpf

Schneidet man einen Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, so zerfällt der Vollkegel in einen **Kegelstumpf** und den Ergänzungskegel dieses Stumpfes. Der Abstand zwischen Grund- und Deckfläche heißt **Höhe h** des Kegelstumpfes. Der Teil der Mantellinie eines geraden Kegels zwischen Grund- und Deckfläche heißt Mantellinie s des geraden Kegelstumpfes.

1. Geometrische Darstellung eines Kegelstumpfes

In Abb. 285 ist ein gerader Kegelstumpf mit dem Grundflächenradius r, dem Deckflächenradius ϱ und der Höhe h im Grund- und Aufriß und in schräger Parallelprojektion geometrisch dargestellt.
Der **Achsenschnitt** eines geraden Kegelstumpfes ist ein gleichseitiges Trapez mit den parallelen Seiten $2r$ und 2ϱ und der Höhe h. Dreht man das Trapez um seine Achse, so wird der Kegelstumpf als Drehkörper erzeugt. Bei der Drehung erzeugt die Mantellinie s die **krumme Mantelfläche** des Kegelstumpfes als Drehfläche, der Radius r die

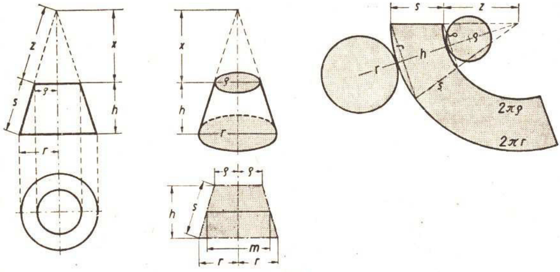

Abb. 285

Grundfläche, der Radius ϱ die Deckfläche (Abb. 285). Die krumme Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes ist **in die Ebene abwickelbar.** Der abgewickelte Kegelstumpfmantel ist ein **Kreisringstück** mit den Radien z und $s + z$, der Breite s und den Bogenlängen $2\pi\varrho$ und $2\pi r$ (Abb. 285).

Aus der Abwicklung läßt sich ein Flächenmodell des Kegelstumpfes herstellen.

2. Berechnung des Kegelstumpfes

Das Volumen des Kegelstumpfes ist (Abb. 285)

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot (h + x) - \frac{1}{3}\pi\varrho^2 x = \frac{\pi \cdot [r^2 h + x \cdot (r^2 - \varrho^2)]}{3}.$$

Wie beim Pyramidenstumpf müssen wir die Höhe x des Ergänzungskegels anderweitig berechnen und einsetzen.

In ähnlichen Dreiecken ist (Abb. 285) $\quad \frac{x}{\varrho} = \frac{h}{r - \varrho},$

$$x = \frac{\varrho \cdot h}{(r - \varrho)}.$$

Setzen wir diesen Wert von x in die Gleichung für V ein, so erhalten wir

$$V = \frac{\pi \cdot [r^2 h + \varrho h \cdot (r + \varrho)]}{3} = \frac{\pi h \cdot (r^2 + r\varrho + \varrho^2)}{3}.$$

Der Rauminhalt eines Kegelstumpfes ist $\boldsymbol{V = \frac{\pi h \cdot (r^2 + r\varrho + \varrho^2)}{3}}$**.**

Hierin sind r und ϱ die Radien der Grund- und der Deckfläche und h die Höhe des Kegelstumpfes.

Man kann den Kegelstumpf vergleichen mit einem Pyramidenstumpf von gleichem Grundflächeninhalt $G = \pi r^2$, gleichem Deckflächeninhalt $g = \pi\varrho^2$ und gleicher Höhe h (Abb. 280). Die Rauminhalte beider Körper sind nach dem Cavalierischen Lehrsatz gleich. Der Rauminhalt des Kegelstumpfes ist

$$V = \frac{h}{3}\left(G + \sqrt{Gg} + g\right) = \frac{\pi h}{3}(r^2 + r\varrho + \varrho^2).$$

Der Mantel eines geraden Kegelstumpfes ist (Abb. 285)

$$\begin{aligned} M &= \pi r \cdot (s + z) - \pi\varrho \cdot z, \\ &= \pi \cdot [rs + z(r - \varrho)]. \end{aligned}$$

In ähnlichen Dreiecken ist $\quad \frac{z}{\varrho} = \frac{s}{r - \varrho},$

$$z = \frac{\varrho \cdot s}{r - \varrho}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} M &= \pi(rs + \varrho s) \\ &= \pi s(r + \varrho). \end{aligned}$$

Der Mantel eines geraden Kegelstumpfes ist $\boldsymbol{M = \pi s(r + \varrho)}$**.**

Hierin sind r und ϱ die Radien und s die Mantellinie des geraden Kegelstumpfes.

Aufgaben

I. Pyramidenstumpf

1. Stelle einen quadratischen Pyramidenstumpf **a)** im Grund- und Aufriß, **b)** in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$) geometrisch dar (Abb. 284)!

2. Zeichne einen Mittelschnitt und einen Diagonalschnitt des quadratischen Pyramidenstumpfes aus Aufgabe 1!

3. Zeichne die Abwicklung des quadratischen Pyramidenstumpfes aus Aufgabe 1 in die Ebene und falte sie zu einem Flächenmodell des Körpers zusammen (Abb. 284)!

4. In der Technik wird der Rauminhalt von Pyramidenstümpfen oft durch die Näherungsformel berechnet

$$V_{St} \approx G_m \cdot h.$$

Hierin ist G_m die mittlere Grundfläche, $G_m = \frac{G+g}{2}$. Unter welchen Bedingungen ist diese Näherungsformel mit guter Annäherung zulässig? Welche geometrische Bedeutung hat die Näherungsformel?

Anleitung:

Es soll werden $$\frac{h}{3}(G + \sqrt{Gg} + g) \approx \left(\frac{G+g}{2}\right) \cdot h,$$

$$2G + 2\sqrt{Gg} + 2g \approx 3G + 3g.$$

Es muß sein $$\sqrt{Gg} \approx \frac{G+g}{2}.$$

Wenn G und g wenig voneinander verschieden sind, ist $\sqrt{Gg} \approx \frac{G+g}{2}$ (geometrisches Mittel $\approx$ arithmetisches Mittel; vgl. „Mittelwerte" in Abschn. 29 und Abb. 161).

II. Kegelstumpf

5. Drehe **a)** ein Rechteck, **b)** ein Quadrat, **c)** ein gleichschenkliges Dreieck, **d)** ein gleichseitiges Dreieck, **e)** ein gleichschenkliges Trapez je um eine Symmetrieachse! Welche Drehkörper entstehen durch Drehung der erzeugenden Flächen? Welche Symmetrieverhältnisse bestehen bei den einzelnen Drehkörpern? Welche Drehflächen entstehen durch Drehung der erzeugenden „Mantellinien"? Zeichne Achsenschnitte der Drehkörper und benenne ihre Seiten (r, ϱ, s, h)! Welche geometrischen Zusammenhänge bestehen zwischen den Seiten der Achsenschnitte jedes einzelnen Körpers?

6. Stelle einen geraden Kegelstumpf **a)** im Grund- und Aufriß, **b)** in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{3}$) geometrisch dar (vgl. Abb. 285)!

7. Zeichne einen Achsenschnitt des Kegelstumpfes aus Aufgabe 6! Wie groß sind die einzelnen Strecken des Achsenschnitts?

8. Zeichne die Abwicklung des Kegelstumpfes aus Aufgabe 6 und stelle ein Flächenmodell des Stumpfes daraus her!

9. In der Technik wird für den Rauminhalt eines Kegelstumpfes oft die Näherungsformel benutzt:

$$V_{St} \approx F_m \cdot h.$$

Hierin ist F_m die mittlere Grundfläche des Kegelstumpfes, sie wird aus dem mittleren Durchmesser m errechnet; es ist $F_m = \frac{\pi m^2}{4}$, wo $m = \frac{2r + 2\varrho}{2} = r + \varrho$ ist. Unter welchen Bedingungen ist die Näherungsformel mit guter Annäherung zulässig? Welche geometrische Bedeutung hat der mittlere Durchmesser m im Achsenschnitt des Kegelstumpfes (Abb. 285)? Welche geometrische Bedeutung hat die Näherungsformel?

10. Der Mantel eines geraden Kegelstumpfes läßt sich auch durch die Formel ausdrücken

$$M = \pi m s.$$

Hierin ist m der mittlere Durchmesser des Kegelstumpfes. Ableitung der Formel! Welche geometrische Bedeutung hat diese Formel? Die Formel $M = \pi m s$ ist keine Näherungsformel!

11. In einem geraden Kegelstumpf mit dem Grundkreisradius r ist der Deckkreisradius gleich dem halben, seine Höhe gleich dem ganzen Grundkreisradius. Stelle **a)** die Mantellinie, **b)** den Mantel, **c)** den Rauminhalt als Funktionen von r analytisch und geometrisch dar!

III. Vermischte Aufgaben

12. Ein Wassereimer hat den oberen Durchmesser 28,5 cm, den unteren Durchmesser 19,5 cm und die Höhe (innen gemessen) 25,5 cm. Sein Fassungsvermögen ist mit 11 l angegeben. Wie groß ist das Fassungsvermögen des Eimers (ohne Berücksichtigung der Wanddicke)

a) nach der genauen Formel für das Kegelstumpfvolumen,

b) nach der Näherungsformel für das Kegelstumpfvolumen (auf 3 Stellen genau)?

c) Wie groß ist der relative Fehler des angegebenen Fassungsvermögens in Prozenten?

13. Eine Milchkanne hat unten die Form eines Hohlzylinders ($d = 30$ cm, $h = 20$ cm), verengt sich dann kegelstumpfartig bei einer Mantellinie von 10 cm auf einen Durchmesser von 18 cm und endigt in einen zylinderförmigen Aufsatz von 10 cm Höhe. Ihr Fassungsvermögen ist mit 20 l angegeben. Wieviel Liter faßt die Milchkanne (auf 3 Stellen genau)? Wie groß ist der relative Fehler des angegebenen Fassungsvermögens in Prozenten?

14. Ein Hochofen hat die in Abb. 287 angegebenen Maße. Wie groß ist der nutzbare Rauminhalt des Hochofens, der sich aus den Rauminhalten des Gestells, der Rast und des Schachtes zusammensetzt (auf 3 Stellen genau)?

15. Die Durchmesser eines Baumstammes (ohne Rinde) sind 48 cm und 38 cm, der Stamm ist 10 m lang.

a) Wieviel Festmeter Holz liefert der Baumstamm nach der genauen Formel und nach der Näherungsformel für das Kegelstumpfvolumen?

b) Wieviel Prozent beträgt der relative Fehler der Näherungslösung (auf 3 Stellen genau)?

16. Ein Baumstamm von 6 m Länge hat einen oberen Umfang von 2,50 m und einen unteren Umfang von 3,20 m (ohne Rinde). Wieviel Festmeter Holz liefert er (auf 3 Stellen genau)?

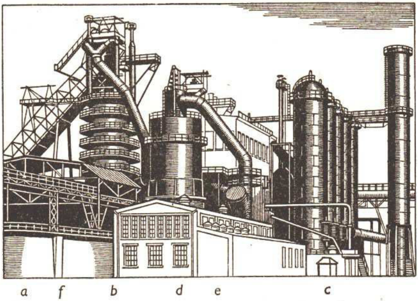

Abb. 286. Gesamtanordnung eines Hochofenwerkes
a) Schrägaufzug, b) Hochofen, c) Winderhitzer, d) Staubsack, e) Elektr. Gaseinzug, f) Gießhütte

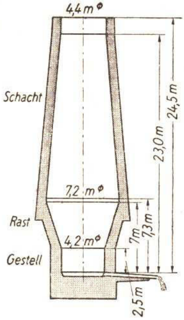

Abb. 287. Hochofen

39. Die Kugel

a) Die Kugel als Drehkörper

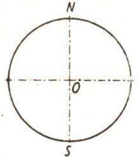

Abb. 288

Dreht man einen Kreis um eine Achse NS (Abb. 288), so erzeugt die Kreisfläche einen **Kugelkörper** als Drehkörper und die Kreislinie die **Kugeloberfläche** als Drehfläche. Der Kreismittelpunkt wird Kugelmittelpunkt O, sämtliche Kreisradien r werden Kugelradien r.

Die Kugel ist der geometrische Ort für alle Punkte im Raum, die von einem festen Punkt, dem Kugelmittelpunkt, gleiche Entfernung haben.

Die Kugel ist zentrisch-symmetrisch zum Kugelmittelpunkt O. Jede Sehne durch den Mittelpunkt nennt man einen **Durchmesser** der Kugel. Jeder Durchmesser ist **Symmetrieachse** der Kugel. Jede Drehung um eine Kugelachse überführt die Kugel in sich. Jede Ebene durch den Kugelmittelpunkt ist **Symmetrieebene** der Kugel, Spiegelung an ihr ergibt wieder die Kugel.

Jede Ebene durch den Kugelmittelpunkt schneidet die Kugel in einem größten Kugelkreis, einem **Großkreis** der Kugel mit dem Radius r. Jeder Großkreis ist ein **Achsenschnitt** der Kugel.

Die Endpunkte einer Kugelachse nennt man **Pole N und S** der Kugel. Die Bezeichnung rührt von der Erdkugel[1]) her (Nordpol N und Südpol S). Der zu einer Kugelachse senkrechte Großkreis (Symmetrieschnitt) heißt **Äquator.**

b) Geometrische Darstellung einer Kugel

In Abb. 289a sind Grund- und Aufriß einer Kugel mit lotrecht stehender Kugelachse NS dargestellt. In Abb. 289b ist ein Kugelbild mit geneigter Kugelachse NS in senkrechter Parallelprojektion auf eine Aufrißebene ε_2 und in Abb. 289c ein Kugelbild mit lotrecht stehender Kugelachse NS in schräger Parallelprojektion (Verzerrung $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$) gezeichnet. Für Abbildungen in senkrechter Parallelprojektion ist der Kugelumriß ein Kreis mit dem Kugelradius r (Abb. 289a und b),

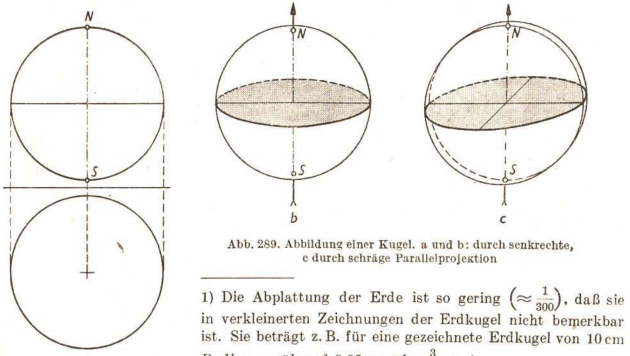

Abb. 289. Abbildung einer Kugel. a und b: durch senkrechte, c durch schräge Parallelprojektion

1) Die Abplattung der Erde ist so gering $\left(\approx \frac{1}{300}\right)$, daß sie in verkleinerten Zeichnungen der Erdkugel nicht bemerkbar ist. Sie beträgt z. B. für eine gezeichnete Erdkugel von 10 cm Radius annähernd 0,03 cm oder $\frac{3}{10}$ mm!

für Abbildungen in schräger Parallelprojektion eine Ellipse mit der Hauptachse $2a > 2r$ und der Nebenachse $2b = 2r$ (Abb. 289c).

Das Bild der Kugel in schräger Parallelprojektion (Abb. 289c) erscheint uns verzerrt, da wir gewohnt sind, den Kugelumriß als Kreis zu sehen. Die gebräuchlichste Abbildung einer Kugel ist daher ihre Abbildung durch senkrechte Parallelprojektion, sie ist auch zeichnerisch die einfachste geometrische Darstellung einer Kugel. Sobald der Äquator einer Kugel im Bild als Ellipse und nicht als Gerade erscheint, liegen die Bilder der Pole bei senkrechter und schräger Parallelprojektion nicht mehr auf dem Kugelumriß (siehe Abb. 289 b und c).

Die krumme Kugeloberfläche ist **nicht in die Ebene abwickelbar.** Man kann daher kein wirklichkeitstreues Abbild der Kugeloberfläche und der Figuren auf ihr in der Ebene entwerfen.

c) Berechnung der Kugel

1. Berechnung der Rauminhalte einer Halbkugel und einer Kugel

Eingrenzung des Halbkugelvolumens. Wird einer Halbkugel vom Radius r ein Zylinder gleicher Grundfläche und Höhe umbeschrieben und ein Kegel gleicher Grundfläche und Höhe einbeschrieben, so ist das Halbkugelvolumen V_H größer als das Kegel-, aber kleiner als das Zylindervolumen (Achsenschnitte der Körper in Abb. 290). Es ist

$$\frac{\pi r^3}{3} < V_H < \frac{3\pi r^3}{3}.$$

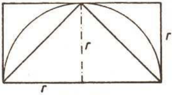

Abb. 290

Das Halbkugelvolumen liegt zwischen $\frac{1}{3}\pi r^3$ und $\frac{3}{3}\pi r^3$.

Um den Rauminhalt der Halbkugel zu bestimmen, suchen wir einen Körper R von gleicher Grundfläche und Höhe wie die Halbkugel, dessen Parallelschnitte zur Grundfläche denselben Flächeninhalt haben wie die entsprechenden Schnittflächen der Halbkugel und dessen Rauminhalt wir mit den bisherigen Formeln berechnen können. Auf die Halbkugel und diesen Körper R wenden wir dann den Cavalierischen Lehrsatz an.

Halbkugel und inhaltsgleicher Restkörper R. Die Schnittfläche eines ebenen Schnitts durch die Halbkugel, parallel zur Halbkugelgrundfläche im Abstand z von dieser, ist ein Kreis mit dem Radius ϱ (Abb. 291), seine Fläche ist

$$F = \pi\varrho^2.$$

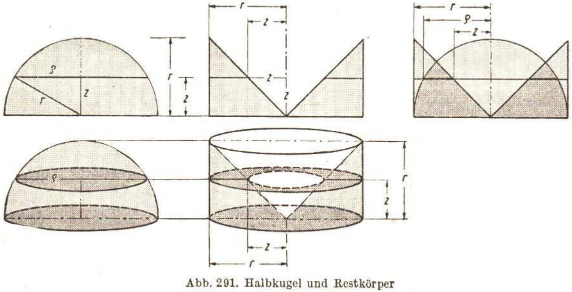

Abb. 291. Halbkugel und Restkörper

Hierin ist $\varrho^2 = r^2 - z^2$ (pythagoreischer Lehrsatz),

also ist $F = \pi (r^2 - z^2) = \pi r^2 - \pi z^2$.

Dieser Ausdruck für F stellt geometrisch die Fläche eines **Kreisrings** mit den Radien r und z dar. Solche Kreisringe entstehen als Schnittflächen in jeder Höhe z, wenn man den umbeschriebenen Zylinder einer Halbkugel (Schnittkreis πr^2) durch einen mit der Spitze nach unten liegenden Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe (Schnittkreis πz^2) aushöhlt (siehe Abb. 291). Ein derartiger ausgehöhlter Körper heißt ein **Restkörper R.**

Die Halbkugel und der betrachtete Restkörper R besitzen in jeder Höhe z Schnittflächen verschiedener Form, aber gleichen Flächeninhalts, die beiden Körper sind nach dem Cavalierischen Lehrsatz rauminhaltsgleich. Es ist

$$V_{\mathrm{H}} = V_{\mathrm{R}}.$$

Der Rauminhalt des Restkörpers läßt sich berechnen, er ist

$$V_{\mathrm{R}} = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2\pi r^3}{3}.$$

Also ist der Rauminhalt der Halbkugel

$$V_{\mathrm{H}} = \frac{2\pi r^3}{3}.$$

Der Rauminhalt einer Kugel vom Radius r ist $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

2. Berechnung der Kugeloberfläche

Wird einer Kugel ein beliebiger konvexer Körper mit n ebenen Flächen umbeschrieben und werden alle Ecken des Körpers mit dem Kugelmittelpunkt verbunden, so entstehen n Pyramiden, die alle gleiche Höhe r haben. Ihre Rauminhalte sind

$$V_1 = \tfrac{1}{3} G_1 \cdot r, \quad V_2 = \tfrac{1}{3} G_2 \cdot r, \quad \ldots, \quad V_n = \tfrac{1}{3} G_n \cdot r.$$

Die Summe ihrer Rauminhalte ist

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_n = \tfrac{1}{3}(G_1 + G_2 + \cdots + G_n) \cdot r.$$

Vergrößert man n immer mehr, so nähert sich die Summe der Grundflächen immer mehr der Kugeloberfläche O und die Summe der Rauminhalte immer mehr dem Kugelvolumen $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

Es ist also $\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot O \cdot r$,

oder $O = 4\pi r^2$.

Die Oberfläche einer Kugel vom Radius r ist $O = 4\pi r^2$.

Das durchgeführte Verfahren zur Berechnung des Rauminhalts einer Kugel stammt von Archimedes [1]).

1) Archimedes, von etwa 287 bis 212 v.d. Ztr., Syrakus (vgl. auch die Berechnung eines guten Näherungswertes für die Zahl π durch Angabe einer oberen und unteren Schranke, $3\frac{10}{70} < \pi < 3\frac{10}{71}$, in Abschn. 31, Aufgabe 5).

Aufgaben

I. Geometrische Darstellung einer Kugel

1. Drehe eine kreisförmige Pappscheibe um einen Durchmesser NS als Achse! Welchen Körper erzeugt die Kreisfläche bei der Drehung? Welche Fläche erzeugt die Kreislinie bei der Drehung?

2. Beweise die folgenden Sätze durch Drehen eines Kreises um eine Achse NS:

a) Schneidet eine Ebene eine Kugel, so ist die Schnittfigur der Ebene mit der Kugel ein Kreis.

b) Jede Ebene durch den Kugelmittelpunkt ist eine Symmetrieebene der Kugel.

c) Die Schnittfigur einer Symmetrieebene mit einer Kugel ist ein Großkreis!

3. Beweise: Schneiden zwei Kugeln einander, so ist die Schnittfigur der beiden Kugeln ein Kreis! Anleitung: Laß zwei sich schneidende Kreise um ihre Zentrale als Drehachse sich drehen! Welche Körper erzeugen die beiden Kreisflächen bei der Drehung? Welche Schnittfigur erzeugt die gemeinsame Sehne beider Kreise bei der Drehung?

4. Beweise: Zwei verschiedene Großkreise einer Kugel halbieren sich stets!
Anleitung: Laß den einen Großkreis um den gemeinsamen Durchmesser der beiden Großkreise sich drehen!

5. Beweise: Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r ist der Großkreisbogen durch diese Punkte! Großkreise auf einer Kugelfläche entsprechen geraden Linien in der Ebene!
Anleitung: Jede Ebene durch die beiden Kugelpunkte P_1 und P_2 schneidet die Kugel in einem Kreis vom Radius $\varrho \leqq r$. Welcher von allen möglichen Kreisbögen mit dem Radius $\varrho \leqq r$ durch zwei feste Punkte P_1 und P_2 hat die kürzeste Bogenlänge?

6. Stelle eine Kugel mit lotrechter Kugelachse NS in senkrechter Parallelprojektion im Grund- und Aufriß dar und zeichne ihr Bild in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$)! Beachte die Lage der Pole N und S im Aufriß und in der Abbildung durch schräge Parallelprojektion (Abb. 289 a und c)!

7. Abwickelbare und nicht-abwickelbare krumme Flächen.

a) Stelle die krummen Flächen zusammen, die in die Ebene abwickelbar sind! Welche Formen haben die Abwicklungen dieser krummen Flächen in die Ebene? In welcher Weise werden diese abwickelbaren krummen Flächen als Drehflächen erzeugt (Geradenflächen)?

b) Die krumme Kugelfläche ist nicht in die Ebene abwickelbar. In welcher Weise wird die Kugelfläche als Drehfläche erzeugt?

8. a) Zeichne auf die Mäntel eines lotrecht stehenden geraden Kreiszylinders und eines lotrecht stehenden geraden Kreiskegels ein Netz sich senkrecht schneidender Höhenlinien und Fallinien! Welche Kurven entstehen auf den Mantelflächen der Körper?

b) Zeichne ein Netz von Höhenlinien und Fallinien auf die Oberfläche einer Kugel! Welche Kurven entstehen auf der Kugelfläche?

9. Bilde das Gradnetz der nördlichen Erdhälfte von 30° zu 30° durch senkrechte Parallelprojektion ab (Abb. 292)!

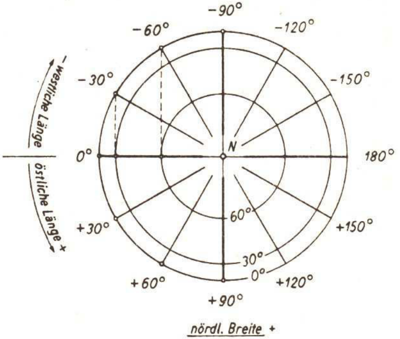

Abb. 292

10. Bilde das Gradnetz der östlichen Erdhälfte von 30° zu 30° durch senkrechte Parallelprojektion (Abb. 293)!

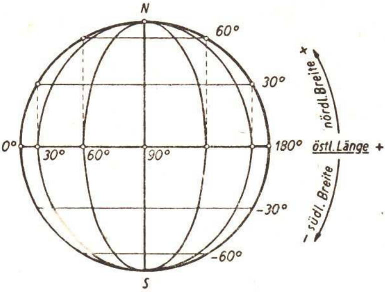

Abb. 293

11. Diese Abbildungen je einer halben Erdoberfläche durch senkrechte Parallelprojektion auf eine waagerechte Bildebene (Aufg. 9) oder eine lotrechte Bildebene (Aufg. 10) nennt man orthographische[1]) Projektionen der Erdkugel. Bleiben bei Abbildung durch orthographische Projektion Flächen in ihrer Größe und Gestalt und Winkel in ihrer Größe im Bild erhalten, sind Erdkarten in orthographischer Projektion f l ä c h e n t r e u und w i n k e l t r e u ?

II. Berechnung der Kugel

12. Zeichne die Abwicklung des Restkörpers R aus Abb. 291 in die Ebene und stelle daraus ein Flächenmodell des Restkörpers her!

13. Die in der Technik benutzten Formeln für den Rauminhalt und die Oberfläche einer Kugel enthalten an Stelle des Kugelradius r oft den leichter meßbaren Kugeldurchmesser $d = 2r$. Wie heißen dann die Formeln für V und O der Kugel?

14. Stelle Oberfläche und Rauminhalt einer Kugel als Funktionen **a)** des Kugelradius r, **b)** des Kugeldurchmessers $d = 2r$ analytisch und geometrisch dar!

15. Bei Überschlagsrechnungen rundet man in der Technik den Rauminhalt einer Kugel vom Durchmesser d oft auf $V \approx \frac{1}{2} d^3$. Begründe diese Näherungsformel!

16. Vergleiche die Oberfläche einer Kugel mit dem Mantel des ihr umbeschriebenen Zylinders!

17. Vergleiche den Mantel einer Halbkugel **a)** mit dem Mantel des ihr umbeschriebenen Zylinders, **b)** mit dem Mantel des umbeschriebenen Kegelstumpfes, der die Halbkugel im Begrenzungskreis seiner mittleren Grundfläche F_m berührt (vgl. Abschn. 38, Aufg. 9 und Abb. 294)!

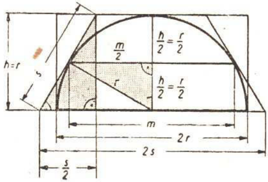

Abb. 294

18. Ein Zylinder, eine Halbkugel und ein Kegel haben gleiche Grundflächen und Höhen. Wie verhalten sich **a)** die Rauminhalte, **b)** die Mäntel, **c)** die Oberflächen der drei Körper („Archimedische Körper“)?

19. Ein Zylinder, eine Kugel und ein Kegel haben gleiche Radien und gleiche Höhen. Wie verhalten sich die Rauminhalte der drei Körper?

---

1) orthographisch (gr.) heißt senkrecht gezeichnet; eine orthographische Projektion ist eine senkrechte Parallelprojektion.

III. In- und Umkugel von Körpern

20. Wie groß sind Radius und Rauminhalt **1)** der einbeschriebenen, **2)** der umbeschriebenen Kugel **a)** eines Zylinders mit quadratischem Achsenschnitt, **b)** eines Kegels mit gleichseitigem Achsenschnitt und je dem Grundkreisradius r? Wie verhalten sich die Rauminhalte der ineinanderliegenden Körper?

Anleitung: Zeichne Achsenschnitte der ineinanderliegenden Körper!

21. Wie groß sind Radius und Rauminhalt **1)** der einbeschriebenen, **2)** der umbeschriebenen Kugel **a)** eines Würfels, **b)** eines Tetraeders, **c)** eines Oktaeders je mit der Grundkante a? Wie verhalten sich die Rauminhalte der ineinanderliegenden Körper?

IV. Angewandte Aufgaben

22. Wie groß ist das Gewicht einer Kugel aus Grauguß von 200 mm Durchmesser?

23. Eine Boje aus Stahlblech soll Kugelform erhalten und 150 kp wiegen. Wie groß müssen Durchmesser und Wanddicke gewählt werden, wenn die Boje im Meerwasser zur Hälfte eintauchen soll (mittlere Wichte von Meerwasser $\gamma = 1{,}02$ kp/dm^3)?

24. Zum Vorwärmen der in einen Hochofen gepreßten Frischluft dienen 3 bis 5 Winderhitzer (Abb. 286 und 295). In diesen geben die aus dem Hochofen kommenden Abgase (Gichtgase) ihre Wärme an ein Schamottegitterwerk ab. Heißluft von einer Temperatur bis 800° wird dann dem Hochofen zugeführt. Abb. 295 zeigt einen Winderhitzer im Längs- und Querschnitt.

a) Wie groß ist der gesamte Hohlraum des Winderhitzers?

b) Wie groß ist der für Wärmespeicherung ausnutzbare Raum des Winderhitzers?

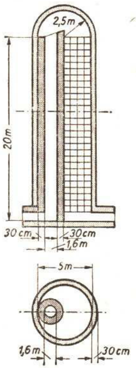

Abb. 295. Winderhitzer

25. Genormte Rundkolben aus Glas (Kugelform mit Hals) haben nach den DIN-Vorschriften u. a. die folgenden Durchmesser: 9 cm, 10,5 cm, 12 cm. Ihr Kochinhalt wird mit 300 cm^3, 500 cm^3, 750 cm^3 angegeben.

a) Wie groß ist der wirkliche Rauminhalt der Rundkolben?

b) Welcher Teil des Rauminhaltes (in Prozenten) bleibt bei obiger Inhaltsangabe ungefüllt (auf 3 Stellen genau)?

26. Moderne Gasbehälter werden als Hochdruck-Kugelgasbehälter oder als Kolbengasbehälter ausgeführt. Kugelgasbehälter haben kugelförmige Gestalt, in ihnen kann das Gas unter hohem Druck stark zusammengepreßt werden. Im Kolbengasbehälter (Abb. 296, Längsschnitt) wird das Gas unten seitlich eingeführt und hebt dabei den kuppelförmigen Abschlußkolben, der genau in die Bodenwölbung des Behälters paßt.

a) Wie groß ist das Fassungsvermögen eines Hochdruck-Kugelgasbehälters von 21,3 m Durchmesser? Auf wieviel Atmosphären wird das Gas in ihm zusammengepreßt, wenn sein nutzbarer Rauminhalt mit 25 000 m^3 angegeben ist?

b) Wie groß ist das nutzbare Fassungsvermögen des Kolbengasbehälters aus Abb. 296?

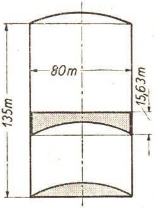

Abb. 296. Kolbengasbehälter

Überschlagsrechnungen: Erst schätzen, dann berechnen (auf 2 Stellen genau)!

27. Bei einer Planung kann ein Gasbehälter von 1 000 m^3 Fassungsvermögen als Kugelgasbehälter oder als Kolbengasbehälter ausgeführt werden.

a) Wieviel m^2 Stahlblech braucht man schätzungsweise für jede Ausführung, wenn für den nutzbaren Raum des Kolbengasbehälters seine Höhe zum Durchmesser im Verhältnis 3 : 2 stehen soll und wenn für den Kolben der nutzbaren Höhe noch $\frac{1}{8}$ zuzuschlagen ist?

b) Wieviel m^2 Stahlblech würde man brauchen, wenn der Gasbehälter als Würfel ausgeführt werden sollte?

28. Kann ein Mensch eine Korkkugel von 1 m Radius aufheben? (Wichte des Korks $\gamma = 0{,}2\ p/cm^3 = 200\ kp/m^3$.)

29. Wie groß ist die Oberfläche der Erde, wenn wir die Erde als Kugel mit dem Radius $r = 6370$ km ansehen?

30. Wie groß sind die Massen der folgenden Himmelskörper:

a) Erde (Radius $r = 6\,370$ km; mittlere Dichte 5,55 g/cm^3);

b) Mond (Radius $r = 1\,738$ km; Dichte 3,3 g/cm^3);

c) Sonne (Radius $r = 695\,300$ km; Dichte 1,4 g/cm^3)?

Anleitung: Schreibe die gegebenen Größen mit abgetrennten Zehnerpotenzen, schätze zuerst und rechne dann aus!

40. Kugelteile

a) Kugelteile als Drehkörper

1. Drehkörper: Kugelsegment und Kugelsektor

Dreht man ein Kreissegment (Kreisabschnitt) von der Höhe h und dem zugehörigen Kreisradius r um seine Achse, so entsteht ein **Kugelsegment** (Kugelabschnitt) von der Höhe h und dem zugehörigen Kugelradius r (Abb. 297).

Dreht man einen Kreissektor (Kreisausschnitt) von der Höhe h und dem Kreisradius r um seine Achse, so entsteht ein **Kugelsektor** (Kugelausschnitt) mit dem Kugelradius r (Abb. 298).

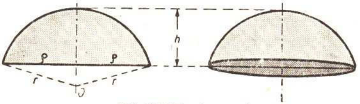

Abb. 297. Kugelsegment

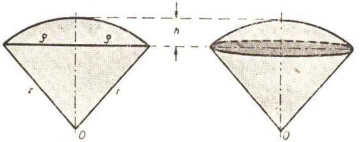

Abb. 298. Kugelsektor

Ein Kugelsektor setzt sich aus dem **zugehörigen Kugelsegment** von der Höhe h und dem **Ergänzungskegel** zusammen, der den Schnittkreis des Kugelsegments zur Grundfläche und den Kugelmittelpunkt zur Spitze hat. Unter der **Höhe eines Kugelsektors** versteht man die Höhe h des zugehörigen Kugelsegments. Kugelsegment und Kugelsektor bezeichnet man als **Kugelteile.**

2. Drehflächen: Kugelkappe

Bei der Drehung eines Kreissegments um seine Achse erzeugt der Bogen des Kreissegments die Mantelfläche, die Sehne den Schnittkreis des Kugelsegments. Die krumme Mantelfläche eines Kugelsegments nennt man **Kugelkappe** (Abb. 297). Die Oberfläche eines Kugelsegments setzt sich aus seiner Kugelkappe (**krumme** Mantelfläche des Kugelsegments) und seinem Schnittkreis (**ebene** Grundfläche des Kugelsegments) zusammen.

b) Berechnung der Rauminhalte der Kugelteile

1. Rauminhalt eines Kugelsegments

Die Überlegungen von Abschn. 39c gelten nicht nur für eine Halbkugel, sondern auch für ein Kugelsegment von der Höhe h, $(h < r)$. Es ist also

Rauminhalt eines Kugelsegments = Rauminhalt des zugehörigen Restkörpers.

Der Restkörper besteht in diesem Fall aus einem Zylinder vom Grundkreisradius r und der Höhe h, der durch einen umgekehrt liegenden Kegel**stumpf** mit dem Grundkreisradius r, dem Deckkreisradius $z = r - h$ und der Höhe h ausgehöhlt wird (siehe Abb. 291). Es ist also

$$\left.\begin{array}{l}\text{Rauminhalt des}\\ \text{Kugelsegments}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Rauminhalt des}\\ \text{Zylinders}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{Rauminhalt des}\\ \text{Kegelstumpfs.}\end{array}\right.$$

$$V_{\text{Segment}} = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}\left[r^2 + r(r-h) + (r-h)^2\right],$$

$$= \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$

Der Rauminhalt eines Kugelsegments ist $\boldsymbol{V_{\text{Segment}} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).}$

Hierin ist r der Kugelradius und h die Segmenthöhe.

2. Rauminhalt eines Kugelsektors

Ein Kugelsektor setzt sich aus dem zugehörigen Kugelsegment und dem Ergänzungskegel zusammen (Abb. 298). Es gilt also für die Rauminhalte der drei Körper:

Kugelsektor = Kugelsegment + Ergänzungskegel,

$$V_{\text{Sektor}} = \frac{\pi h^2(3r - h)}{3} + \frac{\pi \varrho^2 (r-h)}{3}.$$

Im Kreis mit dem Radius r ist nach dem Sehnensatz $\varrho^2 = h(2r - h)$.

Also ist $\quad V_{\text{Sektor}} = \frac{\pi h}{3} \cdot [h \cdot (3r - h) + (2r - h)(r - h)] = \frac{2\pi}{3} r^2 h.$

Der Rauminhalt eines Kugelsektors ist $\boldsymbol{V_{\text{Sektor}} = \frac{2\pi}{3} r^2 h.}$

Hierin ist r der Kugelradius und h die zugehörige Segmenthöhe.

3. Kugelsegment und Kugelsektor von beliebiger Höhe h, $(0 < h \leqq 2r)$

Bei den Ableitungen für die Rauminhalte eines Kugelsegments und eines Kugelsektors hatten wir $h < r$ vorausgesetzt. Die Formeln gelten auch für $h \geqq r$, allgemein für $0 < h \leqq 2r$.

Beweis für den Rauminhalt V' eines Kugelsegments mit der Höhe h', $(r \leqq h' \leqq 2r)$:

Es ist (Abb. 299) $V' = \frac{4\pi r^3}{3} - \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3}$.

Hierin ist $h = 2r - h'$. Also ist

$$V' = \frac{\pi}{3} \cdot [4r^3 - (2r - h')^2 \cdot (r + h')] = \frac{\pi h'^2 \cdot (3r - h')}{3}.$$

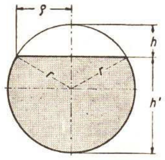

Abb. 299

Beweis für den Rauminhalt V'' eines Kugelsektors mit der Höhe h', $(r \leqq h' \leqq 2r)$:

Es ist (Abb. 299) $V'' = \frac{4\pi r^3}{3} - \frac{2\pi r^2 h}{3} = \frac{2\pi r^2 \cdot (2r - h)}{3}$. Hierin ist $2r - h = h'$.

Also ist $$V'' = \frac{2\pi r^2 h'}{3}.$$

Eine Halbkugel ist ein Kugelsegment bzw. Kugelsektor mit der Höhe $h = r$.

$$V' = \frac{\pi r^2 \cdot (3r - r)}{3} = \frac{2\pi r^3}{3}; \quad V'' = \frac{2\pi r^3}{3}.$$

Eine Vollkugel ist ein Kugelsegment bzw. Kugelsektor mit der Höhe $h = 2r$.

$$V' = \frac{4\pi r^2 \cdot (3r - 2r)}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}; \quad V'' = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Wie groß werden in diesen Sonderfällen die Ergänzungskegel?

c) Berechnung der Flächen der Kugelteile

1. Kugelkappe

Die Oberfläche eines Kugelsektors setzt sich aus seiner Kugelkappe und dem Mantel des Ergänzungskegels zusammen.

Der Flächeninhalt einer Kugelkappe K läßt sich aus dem zugehörigen Kugelsektor in derselben Weise wie die Kugeloberfläche aus dem Kugelkörper berechnen. Vergleiche dazu Abschn. 39 c!

$$V_{\text{Sektor}} = \frac{1}{3} K \cdot r,$$

$$\frac{2\pi r^2 h}{3} = \frac{K \cdot r}{3},$$

$$K = 2\pi r h.$$

Die Fläche einer Kugelkappe ist $K = 2\pi r h$.

Hierin ist r der Kugelradius und h die zugehörige Kappenhöhe.

2. Kugelzone

Der ringförmige Teil der Kugeloberfläche zwischen zwei parallelen Schnittkreisen einer Kugel heißt eine **Kugelzone** (Abb. 300). Der Abstand der beiden Parallelkreise heißt **Höhe h** der Kugelzone. Die Fläche einer Kugelzone Z läßt sich als Differenz zweier Kugelkappen von den Höhen $(x + h)$ und x berechnen. Es ist $Z = 2\pi r(x + h) - 2\pi r x = 2\pi r h$.

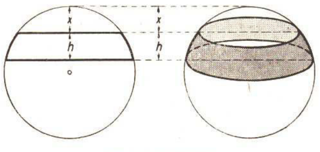

Abb. 300. Kugelzone

Die Fläche einer Kugelzone ist $Z = 2\pi r h$.

Hierin ist r der Kugelradius und h die zugehörige Zonenhöhe.

Kugelkappe und Kugelzone haben gleiche Flächenformeln,

$$K = 2\pi r h \quad \text{und} \quad Z = 2\pi r h.$$

Was bedeutet h in jeder Formel? Bei welchem Körper findet sich die gleiche Flächenformel? Welche Körper haben Kugelkappen mit den Höhen $h = r$ bzw. $h = 2r$?

Aufgaben

I. Kugelteile als Drehkörper

1. Drehe **a)** ein Kreissegment, **b)** einen Kreissektor um ihre Achsen! Welche Drehkörper und Drehflächen werden erzeugt (Abb. 297 und 298)?
2. Stelle **a)** ein Kugelsegment, **b)** einen Kugelsektor im Grund- und Aufriß dar und zeichne Bilder beider Körper in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{4}$)!
3. Wie groß sind **a)** die Fläche des Schnittkreises eines Kugelsegments, **b)** die Mantelfläche des Ergänzungskegels eines Kugelsektors von den Höhen $h = r$ und dem Kugelradius r?
4. Wie groß werden **a)** die Fläche des Schnittkreises eines Kugelsegments, **b)** die Mantelfläche des Ergänzungskegels eines Kugelsektors von den Höhen h und dem Kugelradius r, wenn h gleich $2r$ wird?

II. Flächenvergleichung und Kartenkunde

5. Die Formeln für die Flächen einer Kugelkappe von der Höhe h und einer Kugelzone von gleicher Höhe h sind $K = 2\pi r h$ und $Z = 2\pi r h$; für dieselbe Kugel ist $K = Z = 2\pi r h$. Welche geometrische Folgerung ergibt sich aus dieser Gleichheit von K und Z (Abb. 301)?

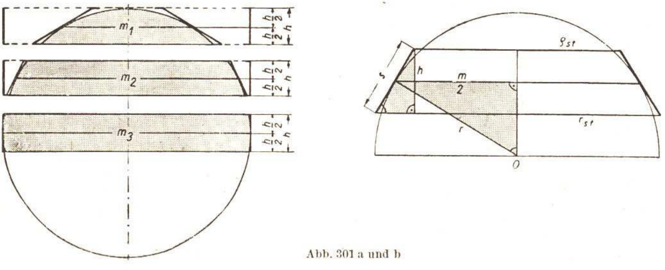

Abb. 301 a und b

6. Legt man um eine Kugelzone (Kugelkappe) von der Höhe h und dem Radius r **a)** einen Zylinder vom Grundkreisradius r und der Höhe h, **b)** einen Kegelstumpf von der Höhe h, dessen Mantel die Kugelzone (Kugelkappe) in der Kreislinie seiner mittleren Grundfläche berührt (siehe Abb. 301), so haben Kugelzone (Kugelkappe), Kegelstumpf und Zylinder inhaltsgleiche Mantelflächen. Beweis (Abb. 301 b)!

III. Berechnung von Kugelteilen

7. Stelle für eine Einheitskugel ($r = 1$, gemessen in der gewählten Längeneinheit) **a)** den Rauminhalt eines Kugelsektors, **b)** den Rauminhalt eines Kugelsegments als Funktionen der Höhe h in einem gemeinsamen Achsenkreuz geometrisch dar!
Anleitung: Betrachteter Bereich $0 \leqq h \leqq 2$. Welche Punkte haben beide Kurven gemeinsam?

8. Stelle für eine Einheitskugel ($r = 1$) **a)** die Fläche einer Kugelkappe, **b)** die Mantelfläche des Ergänzungskegels als Funktionen der Höhe h in einem gemeinsamen Achsenkreuz geometrisch dar!

9. Für welchen Sektor einer Kugel mit dem Radius r ist seine Kugelkappe flächengleich dem Mantel seines Ergänzungskegels?

10. Eine Halbkugel ist durch eine Ebene parallel zur Grundfläche so zu schneiden, daß die abgeschnittene Kugelkappe zur verbleibenden Kugelzone sich wie **a)** $1:1$, **b)** $1:2$, **c)** $1:4$ verhält. Wie sind die einzelnen Schnitte zu legen?

IV. Angewandte Aufgaben

11. Eine Kugel vom Radius r wird durch eine punktförmige Lichtquelle beleuchtet, die in der Entfernung a vom Kugelmittelpunkt steht ($r = 40$ cm, $a = 100$ cm, Abb. 302).

a) Welchen Teil der Kugelfläche beleuchtet die Lichtquelle?

b) Wie groß ist der beleuchtete, wie groß der beschattete Teil der Kugelfläche?

c) Welcher Bruchteil der gesamten Kugelfläche wird beleuchtet?

d) In welcher Entfernung vom Kugelmittelpunkt muß die Lichtquelle stehen, damit sie $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{n}$ der Kugelfläche beleuchtet?

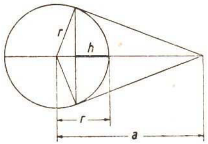

Abb. 302

12. Stelle für eine Einheitskugel ($r = 1$) die Höhe h der beleuchteten Kugelkappe aus Aufgabe 11 (Abb. 302) als Funktion der Entfernung a der Lichtquelle vom Kugelmittelpunkt analytisch und geometrisch dar! Wann wird $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ der Kugelfläche beleuchtet?

13. Eine Kugel vom Radius r wird von einer punktförmigen Lichtquelle beleuchtet, deren Entfernung vom Kugelmittelpunkt n-mal so groß ist wie der Kugelradius r.

a) Wie groß ist die Höhe der beleuchteten Kugelkappe und die beleuchtete Fläche selbst?

b) In welchem Verhältnis steht der beleuchtete Teil der Kugelfläche zur gesamten Kugelfläche?

c) Wie groß wird dieses Verhältnis für $n = 1, 2, 3, \ldots, 10, 100, 1\,000, \ldots$?

14. Wie groß ist der Teil der Erdoberfläche, den man aus einem Flugzeug in **a)** 1 000 m, **b)** 7 000 m Höhe überblicken kann?

15. Wie groß ist der von der Sonne beleuchtete Teil der Erdoberfläche, wenn man die Sonne als punktförmige Lichtquelle ansieht? (Die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde ist der Tafel der astronomischen Konstanten in der Logarithmentafel zu entnehmen.)

16. Welcher Bruchteil der von der Sonne ausgestrahlten Gesamtlichtmenge fällt auf die Erde, wenn man die Sonne als punktförmige Lichtquelle und die Erde als Kugel auffaßt (auf 3 Stellen genau)?

Anleitung in Abb. 303. Abb. 303 ist nicht maßstabgerecht gezeichnet!

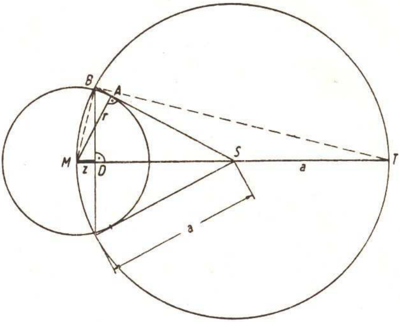

Abb. 303. (Erde stark vergrößert)

17. Im Volk und Wissen Verlag Berlin/Leipzig ist ein Modellbogen zum Selbstbau eines Globus im Maßstab 1 : 50 000 000 erschienen. Hierbei wird die Kugelfläche des Globus durch ein 72-Flach ersetzt, das aus 12 aneinandergesetzten kongruenten Streifen nach Abb. 304 (Maße in mm) gebildet wird.

a) Berechne den Radius des Modells aus der Seite des regelmäßigen Zwölfecks, welches dem Äquator einbeschrieben ist.

b) Wie groß würde der Radius eines Globus vom angegebenen Maßstab werden?

c) Wie groß ist der relative Fehler des Modellradius gegenüber dem nach b berechneten wirklichen Globusradius?

d) Wie groß ist die Oberfläche des Modells?

e) Wie groß wäre die Oberfläche eines Globus als Kugel mit einem Radius nach b?

f) Wie groß ist der relative Fehler der Fläche des Modells gegenüber der nach e berechneten wirklichen Kugelfläche (in Prozenten, auf 3 Stellen genau)?

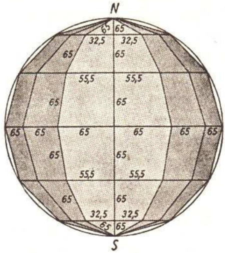

Abb.304. Maßstab 1 : 6