IV Lineare Gleichungssysteme (LGS) & Gaußalgorithmus

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

m Gleichungen

n Unbestimmte

a_{ij} - Koeffizienten $\quad i = 1, \ldots, m$

$j = 1, \ldots, n$

$b_i \neq 0$ - inhomogenes LGS

$b_i = 0$ - homogenes LGS

Ein geordnetes n-Tupel $(y_1, \ldots, y_n)$ reeller Zahlen ist ein Element der Lösungsmenge, wenn es gleichzeitig die m Gleichungen löst.

- Es existiert eine bestimmte Lösung (eindeutig): $m \geq n$
- Es gibt unendlich viele Lösungen, d.h. wir erhalten eine (mehr)parametrige Lösungsschar $m < n$
- Es gibt keine Lösung

das obere Gleichungssystem kann auch als Koeffizientenmatrix dargestellt werden:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
x_1\text{-Spalte} & x_2\text{-Spalte} \cdots & x_n\text{-Spalte} & =
\end{array}
$$

Gaußalgorithmus

Ziel: Ein zum Ausgangssystem äquivalentes „gestaffeltes" System zu konstruieren

Dreiecksgestalt

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 3 \\
y + z &= 2 \\
z &= 1
\end{aligned}
$$

Trapezgestalt

$$
\begin{aligned}
x - y + z &= 3 \\
y + z &= 2
\end{aligned}
$$

Wann bleibt die Lösungsmenge erhalten?

1. Eine Glchg. mit einem reellen Faktor (außer 0) multiplizieren
2. Zwei Glchgen. miteinander vertauschen
3. Eine Glchg. zu einer anderen aufaddieren

Bsp. 1:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ 2x+4y+4z &= 10 \\ x+2z+3y &= 6 \end{aligned} \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right) \cdot(-2)+ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right) \cdot(-1)+$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \cdot(-3)+ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Rücksubstitution:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 3 \quad \longrightarrow x = 1 \\ y+2z &= 3 \quad \longrightarrow y = 1 \\ -2z &= -2 \quad \longrightarrow z = 1 \end{aligned}\right\} \mathbb{L} = \{(1,1,1)\}$$

Bsp. 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ -2 & -2 & -2 & -6 \end{array}\right) \cdot(-1)+ \;\; \cdot 2+ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wähle $z = t$

$\rightarrow y+z = 2$

$y = 2-t$

$x+y+z = 3$

$x+2-t+t = 3$

$x = 1$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(1, 2-t, t)\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ -2 & -2 & -2 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow 0 = 1 \text{ ↯} \Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$$

1.
$$\begin{aligned} 2x-3y-z &= -5 \\ x+y-2z &= 12 \\ -4x+3z &= -17 \end{aligned} \qquad \mathbb{L} = \{(2,4,-3)\}$$

2.
$$\begin{aligned} x-y+z &= 5 \\ 2x+3y-z &= 10 \\ -x-4y+2z &= -4 \end{aligned} \qquad \mathbb{L} = \emptyset$$

3.
$$\begin{aligned} x-y+z &= 5 \\ 2x+3y-z &= 10 \\ -x-4y+2z &= -5 \end{aligned} \qquad \mathbb{L} = \left\{\left(5-\tfrac{2}{5}t, \tfrac{3}{5}t, t\right)\right\}$$