VII Vollständige Induktion

Schreibe als Summe (mit Hilfe des Summenzeichens)

Wdh. Summenzeichen: a) $2+8+18+32+50+72+98+128$

$$\sum_{k=1}^{8} 2k^2$$

b) $\frac{2}{x^3}+\frac{3}{2x^4}+\frac{4}{3x^5}+\frac{5}{4x^6}+\frac{6}{5x^7}$

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{(k+1)}{k\cdot x^{(k+2)}} \quad \text{oder} \quad \sum_{k=2}^{6} \frac{k}{(k-1)x^{(k+1)}}$$

vollständige Induktion

Eine Aussage ist für jede natürliche Zahl k richtig, wenn sie:

1) für $k=1$ richtig ist. (manchmal auch $k=0$ oder $k=2$)

2) aus der Richtigkeit der Aussage für eine beliebige natürliche Zahl n, die Richtigkeit für $n+1$ schließen kann

① z.z.: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

IA: $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$ w. A

IV: $\exists$ bel. $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

IB: Unter der IV ist zu zeigen: $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

IS: $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + n+1 \overset{(IV)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$

$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Da $n \in \mathbb{N}$ bel. war, gilt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$.

② z.z.: $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \forall n \in \mathbb{N}; \forall q \in \mathbb{R}$

③ z.z.: $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

④ z.z.: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\cdot(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

⑤ $3^n - 3$ ist durch 3 teilbar $\forall n \geq 2$

⑥ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

VIII Indirekte Beweise (Ausblick)

$\sqrt{2}$ ist irrational

Bew.: Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational

$\Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{Z}: \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ q, p sind teilerfremd (nicht kürzbar)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad | \; ()^2$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad | \cdot q^2$$

$2q^2 = p^2 \rightarrow p$ ist gerade, also $p = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$

$$2q^2 = 4m^2$$

$q^2 = 2m^2 \rightarrow q^2$ ist gerade $\rightarrow q$ ist gerade ↯

$\rightarrow$ p und q hätten den selben Teiler 2. (↯)

$\rightarrow \sqrt{2}$ ist irrational $\square$