V Zahlensysteme

Es gibt verschiedene Arten von Zahlensysteme.

Wichtig für Uns: • Additionssystem (römische Zahlen MMXIV $\begin{array}{r} 1000 \\ +1000 \\ +10 \\ +5 \\ -1 \\ \hline 2014 \end{array}$)

• polyadische Zahlensysteme / Stellenwertsysteme

Das Bildungsgesetz für Stellenwertsysteme lautet:

gebildete Zahl, Koeffizient, Basis

$$a = \sum_{i=-m}^{n} z_i B^i \quad (m \in \mathbb{N};\ n \in \mathbb{N}_0)$$

z.B.: $\begin{array}{cccccccccc} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & 4, & 2 & 8 & 5 & 0 & 7 \end{array}$

$= 3 \cdot 10^1$ $= 5 \cdot 10^{-3}$

gebräuchliche Zahlensysteme:

Zahlensystem	Basis	zulässige Ziffern	Vorkommen
Dualsystem	2	0, 1	Programmierung, Binär-Codes
Oktalsystem	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (!!) Mathematik der Na'avi aus Avatar (weil 4 Finger an jeder Hand)	Dateizugriffsrechte
Hexadezimalsystem	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F	Farb-Codierung, Datenverarbeitung
Vigesimalsystem	20	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J	Maya-Mathematik
Dezimalsystem	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	Mitteleuropäische Mathematik

Umrechnung

In das Dezimalsystem: Ausmultiplizieren

z.B. $(43204)_5 = 4 \cdot 5^0 + 0 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^4$

$= 4 + 50 + 375 + 2500$

$= (2929)_{10}$

Vom Dezimalsystem: Dividieren und Rest nutzen

$(2534)_{10}$ in das Oktalsystem

$2534 : 8 = 316$ R6

$316 : 8 = 39$ R4

$39 : 8 = 4$ R7

$4 : 8 = 0$ R4

$\Rightarrow (2534)_{10} = (4746)_8$

VI Logik

grch. logos = „das Wort" → Logik (math.) befasst sich mit Aussagen

(1) Aussagen: sinnvolle sprachliche Gebilde mit der Eigenschaft, entweder wahr oder falsch zu sein

→ jeder Aussage p kann man einen Wahrheitswert zuordnen

$$w(p) = \begin{cases} 1 & \text{, falls p wahr ist} \\ 0 & \text{, falls p falsch ist} \end{cases}$$

p: Eine Stunde hat 60 Minuten $\quad w(p) = 1$

q: 8 ist eine Primzahl $\quad w(q) = 0$

→ man kann Aussagen miteinander verknüpfen, so dass neue Aussagen entstehen

„Nicht p" Negation $\left\{ \begin{array}{l} (\neg p) \\ (\sim p) \\ (\bar{p}) \end{array} \right.$ „p und q" – $p \wedge q$ Konjunktion „p oder q" – $p \vee q$ Disjunktion

„Wenn p, dann folgt q" – $p \Rightarrow q$ Implikation

„p genau dann, wenn q" – $p \Leftrightarrow q$ Äquivalenz $\quad (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p)$

Wahrheitstabelle:

$w(p)$	$w(q)$	$w(\neg p)$	$w(p \wedge q)$	$w(p \vee q)$	$w(p \Rightarrow q)$	$w(p \Leftrightarrow q)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Negation $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q \quad ; \quad \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

Implikation und Äquivalenz sind in der Mathematik wichtig

$p \Rightarrow q$ $\quad$ p ist hinreichend für q

q ist notwendig für p

p impliziert q

$p \Leftrightarrow q$ $\quad$ p ist hinreichend und notwendig für q

Bsp.: $A: f'(x_0) = 0$

$B: f''(x_0) \neq 0$

C: f besitzt in x_0 einen Extrempunkt

$C \Rightarrow A \iff \neg A \Rightarrow \neg C$

$A \wedge B \iff C$

Wenn in der Mathematik mehrere Aussagen äquivalent zueinander sind, nutzt man häufig den „Ringschluss" um dies zu zeigen.

$A \iff B \iff C \iff D \iff A$

$$\begin{array}{ccc} A & \Longrightarrow & B \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ D & \Longleftarrow & C \end{array}$$

$A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, $C \Rightarrow D$, $D \Rightarrow A$

(2) Aussageformen und Quantoren

In der Mathematik hängen Aussagen oft von Variablen ab, darum betrachten wir Aussageformen $p(x)$, die von einer Variable abhängen.

Bsp.: $p(x): x^2 - 2x + 1 = 0$ $\quad w(p(x))$ $\rightsquigarrow$ man kann $p(x)$ keinen Wahrheitswert zuordnen

1.) Für x konkrete Objekte einsetzen

($p(1)$ wahr ; $p(2)$ falsch)

2.) Variable x wird durch Quantoren gebunden

wichtigste Quantoren: $\forall$ – Allquantor („Für alle") „$\forall x \in \mathbb{R}$"

$\exists$ – Existenzquantor („Es existiert (mindestens) ein") $\exists x \in \mathbb{R}$

$\exists!$ („Es existiert genau ein")

$\nexists$ („Es existiert kein")

Bsp.: $u: (\forall x \in \mathbb{R}: p(x))$ falsch $\qquad$: – gilt

$v: (\exists x \in \mathbb{R}: p(x))$ wahr

$\neg u: (\exists x \in \mathbb{R}: \neg p(x))$

$\neg v: (\forall x \in \mathbb{R}: \neg p(x))$

Bsp. aus der Analysis:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\qquad$ ε-δ-Def. der Stetigkeit

Negiere folgende Aussagen und prüfe den Wahrheitswert, wenn möglich

1) a: „$17 < 23$" $\neg a$: „$17 \geqq 23$"

2) b: „8 ist gerade" $\neg b$: „8 ist ungerade"

3) c: „Alle Autos in Leipzig sind weiß." $\neg c$: „Es existiert ein Auto, dass nicht weiß ist."

4) d: „Alle Studenten haben Logik nicht verstanden"

$\neg d$: „Es gibt einen Studenten, der Logik verstanden hat."