(7) Wurzelgleichungen

Gleichungen, in denen die Unbestimmte mindestens einmal im Radikant einer Wurzel vorkommt

Bsp.: $\sqrt[3]{x+1} = 2 \iff x+1 = 8$

$x = 7$

1. Schritt: Wurzel isolieren

2. Schritt: Potenzieren → Scheinlösungen können entstehen → PROBE

Rechnen lassen

Aufg.: $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x-4} = 5$

$$\sqrt{x+5} = 5 - \sqrt{2x-4}$$

$$x+5 = 25 - 10\sqrt{2x-4} + 2x - 4$$

$$10\sqrt{2x-4} = x + 16$$

$$100(2x-4) = x^2 + 32x + 256$$

$$0 = x^2 - 168x + 656$$

$$x_{1/2} = 84 \pm \sqrt{6400}$$

$x_1 = 4$ $\qquad x_2 = 164$ (durch Probe als Scheinlsg. identifiziert)

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{4\}$$

(8) Exponentialgleichungen

Unbekannte tritt nur im Exponenten auf → häufig nicht lösbar

nur wenn Form: $a^{P_1(x)} = b^{P_2(x)}$ $\qquad a, b, c \in \mathbb{R}^+$ und $P_1(x), P_2(x)$ Polynome

1. Fall: $a = b$ wende $\log_c a$ auf beiden Seiten an → $P_1(x) = P_2(x)$

2. Fall: $a \neq b$ beliebiger $\log_c$ anwendbar → $P_1(x) \cdot \log_c a = P_2(x) \cdot \log_c b$

$$P_1(x) = P_2(x) \cdot \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Aufg.: $5^{3x-5} = 25^{2x+1}$

$$\iff 5^{3x-5} = 5^{4x+2}$$

$$\iff (3x-5) \cdot \log_5 5 = (4x+2) \cdot \log_5 5 \quad \Rightarrow x = -7$$

(9) Logarithmengleichungen

Unbekannte tritt im Argument von logarithmischen Funktion auf

Da Lsg nur für positive Argumente definiert, muss Definitionsbereich bestimmt werden

$\Rightarrow$ Probe, ob Logarithmus im Definitionsbereich liegt

1. Schritt: Logarithmusgesetze anwenden und Glchg. umformen, damit wir

$$\log_a P_1(x) = b \qquad a \neq 1 \qquad \text{oder} \qquad \log_a P_1(x) = \log_a P_2(x)$$

($P_1(x), P_2(x)$ sind Polynome von ganzrat. Fktnen)

2. Schritt: Potenziere

$$P_1(x) = a^b \qquad\qquad P_1(x) = P_2(x)$$

3. Schritt: Probe

Bem.: Bei $\log_a P_1(x) = \log_b P_1(x)$ versuchen Basen mit Log.-gesetzen umzuwandeln.

(1) $\log_4 x - \log_4 (x-2) = 2$

$\log_4\left(\frac{x}{x-2}\right) = 2$

$\frac{x}{x-2} = 16$

$x = \frac{32}{15}$ $\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{\frac{32}{15}\right\}$

(Probe gltn.)

(2) $\log_3 x + \log_3 (2x+1) = \log_3 (x+4)$

$\log_3 (2x^2+x) = \log_3 (x+4) \quad | 3^{()}$

$2x^2 + x = x + 4$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$, aber nur $x = \sqrt{2}$ $(-\sqrt{2} < 0)$

$\mathbb{L} = \{\sqrt{2}\}$

(3) $\log_9 (2x^2+1) = \log_3 (x+1)$

$$\log_9 (2x^2+1) = \frac{\log_3 (2x^2+1)}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (2x^2+1)}{2} \quad (1)$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\log_3 (2x^2+1)}{2} = \log_3 (x+1) \Leftrightarrow \log_3 (2x^2+1) = \log_3 (x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 1 = (x+1)^2 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2 \qquad \mathbb{L} = \{0, 2\}$$