III Gleichungen & Ungleichungen

Bei Gleichungen: $ax + b = c$

1. Add. / Subtr. mit $\alpha \in \mathbb{R}$ (z.B. $-b$)
2. Mult. / Div. mit $\beta \in \mathbb{R}$ (z.B. $\frac{1}{a}$, $a \neq 0$)
3. Auf beide Seiten anwenden, damit Äquivalenz (Gleichwertigkeit) erhalten bleibt

Achtung: Beim Potenzieren können Scheinlösungen auftauchen $\rightarrow$ PROBE

Bsp.: $x = -1$

$x^2 = 1$

$x_{1/2} = \pm 1$

(1) Wahrheitswerte für Gleichungen

$2 = 2$	wahr		
$\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{5}{6}$	wahr		
$1 = 2$	falsch		
$x + x = 2x$	wahr für alle x (allgemeingültig)	$\mathbb{L} = \mathbb{R}$	$(\forall x \in \mathbb{R})$
$x + 2 = 3$	wahr für $x = 1$, sonst falsch	$\mathbb{L} = \{1\}$	
$x^2 = 4$	wahr für $x = -2$ und $x = 2$, sonst falsch	$\mathbb{L} = \{-2, 2\}$	

(2) Ungleichungen

Sind von der Form $T_1 < T_2$, $T_1 \leq T_2$, $T_1 > T_2$, $T_1 \geq T_2$ (T_1, T_2 mathematische Terme)

Es gilt: 1.) Wenn man die Seiten vertauscht, muss man das Zeichen umdrehen

2.) Wenn $T_1 \leq T_2$, $T_2 \leq T_3 \Rightarrow T_1 \leq T_3$ (Transitivität) $[M_1 \subset M_2, M_2 \subset M_3 \Rightarrow M_1 \subset M_3]$

Mind. ein Term sollte eine Unbekannte enthalten

Umformungsregeln: $T_1 < T_2 \rightarrow T_1 + T_3 < T_2 + T_3$

$$T_1 < T_2 \rightarrow T_1 \cdot T_3 \begin{cases} < T_2 \cdot T_3 & \text{, falls } T_3 > 0 \\ > T_2 \cdot T_3 & \text{, falls } T_3 < 0 \end{cases}$$

(analog für andere Relationszeichen)

Gib die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen an:

① $x+2 \geqq 2x+3$

$x \leqq -1$

$\mathbb{L} = (-\infty; -1]$

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqq -1\}$

② $\frac{2x+3}{2} < \frac{2x-1}{-3}$

$x < -\frac{7}{10}$

$\mathbb{L} = (-\infty, -\frac{7}{10})$

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{7}{10}\}$

③ $\frac{2x-3}{2} > \frac{2x-1}{-3}$

$x > \frac{11}{10}$

$\mathbb{L} = (\frac{11}{10}, \infty)$

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{11}{10}\}$

(3) Quadratische Gleichungen

$ax^2+bx+c=0$

Normalform: $x^2+px+q=0$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ — Diskriminante

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \rightarrow$ es ex. 2 reelle Lsg.

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \rightarrow$ es ex. 1 reelle Lsg (2 Lsg. fallen zusammen → Doppelwurzel)

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \rightarrow$ es ex. keine reelle Lsg. (sondern 2 komplexe Lsg.)

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$0 = x^2+px+q$

$0 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$

$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

$x+\frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

① $2x-(x+2)^2 = (x-2)^2 - 4(x+1)$ $\qquad \mathbb{L} = \{1, 2\}$

② $\frac{x^2+2x}{2x^2+2x-4} = 1$ $\qquad x_1 = 2$, $x_2 = -2$, aber für $x_2 = -2$ ist Nenner 0 $\Rightarrow \mathbb{L} = \{2\}$

③ $x^6+2x^5-3x^4=0$ $\qquad \mathbb{L} = \{-3, 0, 1\}$

④ $x^4+5x^2-36=0$ $\qquad \mathbb{L} = \{-2, 2, -3i, 3i\}$

Methode der Reduktion des Grades

Wenn x_s eine Lsg von $\sum_{l=0}^{n} a_l x^l = 0$, dann kann man den Linearfaktor $(x-x_s)$ mittels Polynomdivision abspalten → Grad des Polynoms um 1 verringert

Glchgen mit ungeradem Grad haben immer mindestens 1 reelle Lsg!

Aufg.: $x^3+x^2-4x-4=0$ $\qquad \mathbb{L} = \{-2, -1, 2\}$

(4) Quadratische Ungleichungen

$x^2 \leq -2x - 1$

1. Schritt: Unglchg. umformen, bis auf einer Seite ein quadr. Polynom in Normalform steht.

$x^2 + 2x + 1 \leq 0$ → nach oben geöffnet

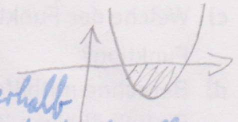
2. Schritt: NST bestimmen

$x_{1/2} = -1$ (doppelte NST)

Fall 1: $P(x)$ hat 2 versch. reelle NST x_1, x_2

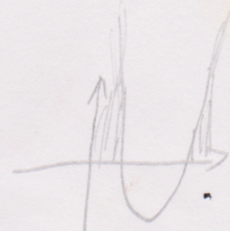
Falls $P(x) \leq 0 \rightarrow \mathbb{L} = [x_1, x_2]$

$P(x) < 0 \rightarrow \mathbb{L} = (x_1, x_2)$ innerhalb des Intervalls



falls $P(x) > 0 \rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [x_1, x_2]$

$P(x) \geq 0 \rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus (x_1, x_2)$ außerhalb des Intervalls

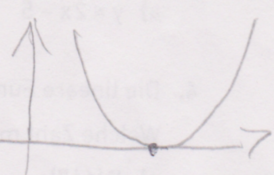


Fall 2: $P(x)$ hat doppelte NST (wie im Bsp.)

Falls $P(x) \leq 0 \rightarrow \mathbb{L} = \{x_0\}$

Falls $P(x) \geq 0 \rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{R}$

Falls $P(x) < 0 \rightarrow \mathbb{L} = \{\}$



Fall 3: $P(x)$ hat keine NST

→ $P(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

es gibt kein $x \in \mathbb{R}$, so dass $P(x) \leq 0$

① $x^2 + 2x > 3$

$\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [-3, 1]$

$\mathbb{L} = (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$

② $x^2 < -x + 6$

$\mathbb{L} = (-3, 2)$

③ $0 < 3x^2 - 6x + 3$

$\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

④ $-x^2 + x - 6 < 0$ $\quad \mathbb{L} = \mathbb{R}$

(5) Bruchungleichungen

$\frac{2}{x+1} \leq 1$, $x \neq -1$

Beide Seiten mit dem Hauptnenner der auftretenden Brüche multiplizieren

→ Fallunterscheidung bzgl. der Vorzeichen des Hauptnenners

Fall 1: $x + 1 > 0 \rightarrow x > -1 \rightarrow \mathbb{I}_1 = (-1, \infty)$

$2 \leq x + 1 \rightarrow 1 \leq x \rightarrow \mathbb{I}_2 = [1, \infty)$

$\mathbb{L}_1 = \mathbb{I}_1 \cap \mathbb{I}_2 = [1, \infty) = \mathbb{I}_2$

Fall 2: $x+1<0 \rightarrow x<-1 \rightarrow J_3=(-\infty,-1)$

$L_2 = J_3 \cap J_4 = (-\infty,-1) = J_3$

$2 \geq x+1 \rightarrow 1 \geq x \rightarrow J_4 = (-\infty, 1]$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \Rightarrow \mathcal{L} = \mathbb{R} \setminus [-1,1)$

$\mathcal{L} = (-\infty,-1) \cup [1,\infty)$

① $\frac{3x-8}{2x-1} > -5$, $x \neq \frac{1}{2}$ $\quad \mathcal{L} = \mathbb{R} \setminus [\frac{1}{2}, 1]$ oder $\mathcal{L} = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1,\infty)$

$J_1 = (\frac{1}{2},\infty)$, $J_2 = (1,\infty) \rightarrow \mathcal{L}_1 = (1,\infty)$; $J_3 = (-\infty, \frac{1}{2})$, $J_4 = (-\infty, 1) \rightarrow \mathcal{L}_2 = (-\infty, \frac{1}{2})$

② $\frac{3x+9}{2x-3} > 6$ $\quad \mathcal{L} = (\frac{3}{2}, 3)$ $\quad \mathcal{L}_1 = \emptyset$ $\quad \mathcal{L}_2 = (\frac{3}{2}, 3)$

(6) Betragsungleichungen

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{für } x \geq 0 \\ -x, & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

→ Betrag durch eine Fallunterscheidung beseitigen

Bsp.: $|3-5x| > 5$

1. Fall: $3-5x<0 \rightarrow J_1 = (\frac{3}{5},\infty)$; $-(3-5x) > 5 \rightarrow J_2 = (\frac{8}{5},\infty)$

$\frac{3}{5} < x$ $\qquad x > \frac{8}{5}$

$\mathcal{L}_1 = J_1 \cap J_2 = J_2$

2. Fall: $3-5x>0 \rightarrow J_3 = (-\infty, \frac{3}{5})$; $3-5x>5$

$\frac{3}{5} > x$ $\qquad \rightarrow J_4 = (-\infty, -\frac{2}{5})$

$-\frac{2}{5} > x$

$\mathcal{L}_2 = J_3 \cap J_4 = J_4$

$$\mathcal{L} = (-\infty, -\frac{2}{5}) \cup (\frac{8}{5}, \infty)$$

$$\mathcal{L} = \mathbb{R} \setminus [-\frac{2}{5}, \frac{8}{5}]$$

① $|2x+7| \geq 2$ $\quad \mathcal{L} = (-\infty, -\frac{9}{2}) \cup (-\frac{5}{2}, \infty)$

② $|2x-5| > 2(x+1)$ $\quad \mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3}{4}\}$; $\mathcal{L} = (-\infty, \frac{3}{4})$

③ $|2x-5| < |2x+1|$ $\quad \mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$; $\mathcal{L} = (1,\infty)$