(7) Logarithmen

Anregung: $2^x = 8$ Lsg. intuitiv $x = 3$, aber allgemein? $\Rightarrow \log_2 8 = x$

Logarithmus (logos = „Verhältnis", arithmós = „Zahl") ist eine Verhältniszahl

~ 1614 John Napier: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \log a - \log b = \log c - \log d$

Seien $a, b, x, y, d \in \mathbb{R}_+$; $a, b, d \neq 1$

Def.: (i) $\log_b a = c \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow b^c = a$

(ii) $\log_b 1 = 0$

(iii) $\log_b b = 1$

(I) $\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$

(II) $\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

(III) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$: $\log_b (x^\alpha) = \alpha \cdot \log_b x \Rightarrow$ Für $n \in \mathbb{N}$: $\log_b (\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \cdot \log_b x$

(IV) $\log_b a = \log_b d^{\log_d a} \Rightarrow \log_d a = \dfrac{\log_b a}{\log_b d}$

Spezielle Logarithmen

$\log_{10} a = \lg a$ dekadischer Logarithmus (oder Briggscher Log.)

$\log_e a = \ln a$ Logarithmus naturalis (oder Napierscher Log.)

$\log_2 a = \mathrm{ld}\, a$ binärer Logarithmus (oder binärer Log.)

(8) Binomischer Lehrsatz und das Pascalsche Dreieck

Satz: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (1)

$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}^{k \text{ Faktoren}}}{k!}$ $n, k \in \mathbb{N}$ $a, b \in \mathbb{R}$

Pascal'sches Dreieck

	0	
I	0 1 0	$(a+b)^0 = 1$
II	0 1 1 0	$(a+b)^1 = a + b$
III	0 1 2 1 0	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
IV	0 1 3 3 1 0	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
V	0 1 4 6 4 1 0	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
VI	0 1 5 10 10 5 1 0	

II Mengenlehre

(1) Begriffe

„Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen"

— Georg Cantor, 1869 —

$a \in M$ (a ist ein Element von M)

$a \notin M$ (a nicht Element M)

Bem.: Menge enthält jedes Element nur ein Mal

$M = \{2,2\} = \{2\}$

Sein M_1, M_2 Mengen

$M_1 = M_2 \iff M_1$ und M_2 enthalten dieselben Elemente (M_1 gleich M_2)

$M_1 \subseteq M_2 \iff$ alle Elemente von M_1 sind auch in M_2 enthalten (M_1 ist Teilmenge von M_2)

$M_1 \subset M_2 \iff$ alle Elemente von M_1 sind auch in M_2 enthalten <u>und</u> es gibt Elemente in M_2, die nicht in M_1 sind (M_1 ist echte Teilmenge von M_2)

Hinweis $<; \leq$

$M_2 \supset M_1$

$M \subseteq M$ und $\emptyset \subseteq M$

man kann Mengen auf zwei Arten angeben:

1. Explizite Angabe aller Elemente: $M_1 = \{1,3,6,7\}$; $M_2 = \{♡, ☆, ○, □\}$
2. Angabe der charakteristischen Eigenschaft: $M_3 = \{x \mid x \text{ ist Primzahl}\}$

   $M_4 = \{k \mid k \text{ ist Küchengerät}\}$

1 $M = \{a,b,c\}$

Gib alle Teilmengen von M an.

$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, M\}$

Potenzmenge von M

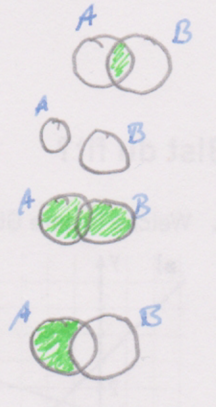
$\#\mathcal{P}(M) = 8 = 2^3$ $\Rightarrow$ allgemein: $\mathcal{P}(M) = 2^{\#M}$

Kardinalität / Anzahl d. Elemente (wenn endlich)

$\#M = 3$

(2) Mengenoperationen

Seien A, B (nichtleere) Mengen



$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$ – Durchschnitt von A und B

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow$ A und B sind disjunkt

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$ – Vereinigung von A und B

„nicht ausschließendes oder"

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$ – Differenzmenge

Achtung A/B ist die Faktormenge

$A \times B$ = kartesisches Produkt = Menge aller geordneten Paare (a,b) mit $a \in A$ und $b \in B$

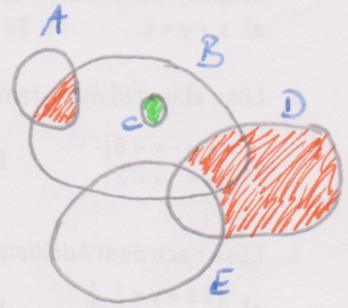
Bsp.: $A = \{1,2,3\}$; $B = \{a,b\}$; $A \times B = \{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\}$

①

$(A \setminus C) \cap B$

$\boxed{(C \cap B) \cap A}$

②

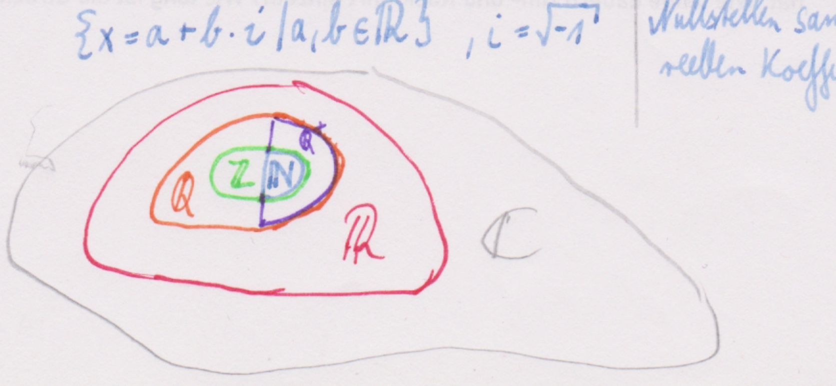


$\boxed{(A \cap C) \cup (B \cap C)}$

$\boxed{(D \setminus E) \cup (B \cap A)}$

(3) Zahlbereiche

Zahlbereich		Algebraische Ansätze
$\mathbb{N}$ – natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$	entsteht durch wiederholte Addition mit 1; besitzt neutrales Element der Multiplikation
$\mathbb{N}_0$ – natürliche Zahlen mit Null	$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	besitzt neutrales Element der Addition
$\mathbb{Z}$ – ganze Zahlen, natürliche Zahlen, ihre entgegengesetzten und Null	$\mathbb{Z} = \{-\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}\}$	abgeschlossene Addition durch inverse Elemente (inverse Operation: Subtraktion)
$\mathbb{Q}^+$ – positive rationale Zahlen	$\mathbb{Q}^+ = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{N}_0, b \in \mathbb{N}\}$	abgeschlossene Multiplikation durch inverse Elemente (inverse Operation: Division); aber: keine abgeschlossene Addition
$\mathbb{Q}$ – rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$	abgeschlossen Addition & Multiplikation $\Rightarrow$ lineare Algebra ist mit $\mathbb{Q}$ zufrieden
$\mathbb{R}$ – reelle Zahlen	$\mathbb{R} = \{\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}\}$, $\mathbb{I} = \{x \mid x \text{ ist irrational}\}$; Eine Zahl heißt irrational, wenn sie nach dem Komma unendlich, aber nicht periodisch ist.	
$\mathbb{C}$ – komplexe Zahlen	$\{x = a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, $i = \sqrt{-1}$	Nullstellen sämtlicher Polynome mit reellen Koeffizienten



an Tafel Bsp. sammeln

(4) Intervallschreibweise für Mengen reeller Zahlen

Seien $a, b \in \mathbb{R}$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ alternativ $]a,b[$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$; $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$; $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$; $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$; $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$

Aufg.: $I_1 = [1,3)$, $I_2 = [3,7]$, $I_3 = (-2,10)$

a) $I_1 \cap I_2 = \emptyset$

b) $I_1 \cap I_3 = [1,3)$

c) $I_1 \cup I_2 = [1,7]$

d) $I_1 \setminus I_2 = [1,3)$

e) $I_3 \setminus I_2 = (-2,3) \cup (7,10)$

f) $(I_1 \cup I_2) \cap I_3 = (I_1 \cap I_3) \cup (I_2 \cap I_3) = [1,7]$