(iv) Potenzen

Seien $a, x, y \in \mathbb{Z}$ $(\in \mathbb{R})$ $\quad k, l \in \mathbb{Z}$

$$\underset{\text{Potenz}}{a} = \underset{\text{Basis}}{x}^{\overset{\text{Exponent}}{k}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{k\text{-mal}}$$

(I) $$x^k \cdot y^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{k\text{-mal}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{k\text{-mal}} \overset{(K)}{\underset{(A)}{=}} \underbrace{(x\cdot y)\cdot(x \cdot y)\cdot \ldots \cdot (x\cdot y)}_{k\text{-mal}} = (x \cdot y)^k$$

(II) $$x^k \cdot x^l = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{k\text{-mal}} \cdot \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{l\text{-mal}} = x^{k+l}$$

(III) $$\frac{x^k}{x^l} = x^{k-l}$$ Bsp.: $$\frac{5^5}{5^3} = \frac{\cancel{5}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{5}\cdot 5\cdot 5}{\cancel{5}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{5}} = 5^2$$ $x \neq 0$

(IV) $$(x^k)^l = \underbrace{(x^k)\cdot \ldots \cdot (x^k)}_{l\text{-mal}} = \underbrace{\underbrace{(x \cdot \ldots \cdot x)}_{k\text{-mal}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x \cdot \ldots \cdot x)}_{k\text{-mal}}}_{l\text{-mal}} = x^{k \cdot l}$$

Def.: a) $$x^{-k} := \frac{1}{x^k} \qquad x \neq 0$$

Beispiel der Herleitung: $$5^{-3} = \frac{5^2}{5^5} = \frac{\cancel{5}\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}\cdot\cancel{5}\cdot 5\cdot 5\cdot 5} = \frac{1}{5^3}$$

b) $$x^0 := 1$$

Beispiel der Herleitung: $x^4 \cdot x^0 \overset{(II)}{=} x^{4+0} = x^4 \Rightarrow x^0$ muss 1 sein (neutrales Element der Multiplikation)

auch $0^0 = 1$, sinnvoll für Polynome (6)

(c) $x^1 = x$

Bsp. ① $$a \cdot r^p + b \cdot s^p - c \cdot r^p + d \cdot s^p = (a-c)\,r^p + (b+d)\,s^p$$

② $$x^{3m-1} \cdot x^{m+1} = x^{4m}$$

③ $$\frac{8^2 \cdot 5^2}{8^2 + 6^2} = 16$$ Achtung

④ $$\frac{5 \cdot a^{x+y} \cdot b^{3u+v}}{7c^2} : \frac{5c^4}{28 a^{y-x} b^{v-2u}} = \frac{4 a^{2y} b^{u+2v}}{c^6} \qquad (c \neq 0)$$

⑤ (a) $(-u^2)^3 = -u^6$

(b) $((-u)^2)^3 = u^6$

(c) $(-u^3)^2 = u^6$

(v) Wurzeln & Potenzen mit rationalen Exponenten

Anregung: $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 5^{\frac{1}{3}\cdot 3} = 5^1 = 5 \quad \Rightarrow 5^{\frac{1}{3}} := \sqrt[3]{5}$

Seien $p, q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ $u, v, x \in \mathbb{R}^+$: $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}} := \sqrt[q]{x^p}$

$\Rightarrow$ (I') (a) $\sqrt[p]{u}\cdot\sqrt[p]{v} = u^{\frac{1}{p}}\cdot v^{\frac{1}{p}} \overset{(4\mathrm{I})}{=} (u\cdot v)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{u\cdot v}$

(b) $\dfrac{\sqrt[p]{u}}{\sqrt[p]{v}} = \dfrac{u^{\frac{1}{p}}}{v^{\frac{1}{p}}} \overset{(4\mathrm{I})}{=} \left(\dfrac{u}{v}\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{\dfrac{u}{v}}$

(II') $\sqrt[p]{u}\cdot\sqrt[q]{u} = u^{\frac{1}{p}}\cdot u^{\frac{1}{q}} \overset{(4\mathrm{II})}{=} u^{\frac{q+p}{q\cdot p}} = \sqrt[q\cdot p]{u^{q+p}}$

(III') $\dfrac{\sqrt[p]{u}}{\sqrt[q]{u}} = u^{\frac{1}{p}} : u^{\frac{1}{q}} \overset{(4\mathrm{III})}{=} u^{\frac{q-p}{q\cdot p}} = \sqrt[q\cdot p]{u^{q-p}}$

(IV') $\sqrt[p]{\sqrt[q]{u}} = \left(u^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \overset{(4\mathrm{IV})}{=} u^{\frac{1}{q\cdot p}} = \sqrt[q\cdot p]{u}$

Bem.: (i) $\sqrt[p]{u^p}$, wenn $p\in\mathbb{N}$ gerade $= |u| := \begin{cases} -u, & u<0 \\ u, & u\geq 0 \end{cases}$

(ii) Lsg. von $x^2 = -1$ bzw. $\pm\sqrt{-1}$ ist i (Imaginäre Einheit) $\in \mathbb{C}$ (komplexe Zahlen)

Es gilt: $i^2 = -1$; Zahlen in $\mathbb{C}$: $\underbrace{a}_{\text{Realteil}} + i\cdot \underbrace{b}_{\text{Imaginärteil}}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ Jede reelle Zahl hat Imaginärteil $\equiv 0$ (Bsp. $\sqrt{5} = \sqrt{5} + i\cdot 0$)

1. $\left(\sqrt[3]{6}\right)^3 = 6$

2. $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} = 2$

3. $\sqrt[4]{\dfrac{1}{256}} = \dfrac{1}{4}$

4. $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{2^8}$

5. $\left(\sqrt{0{,}5}\right)^{-2} = 2$

6. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{1024}} = \sqrt{2}$

7. $\dfrac{\sqrt[6]{x^5\cdot\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt[6]{x^4}}} : \dfrac{\sqrt{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[9]{x^7}}}{\sqrt[9]{x^7\cdot\sqrt{x}}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

Rationalmachen des Nenners

Es gilt: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ $\quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

① $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

② $\frac{1+2\cdot\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

③ $\frac{5\sqrt{3} - 3\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \sqrt{15}$

(vi) Polynomdivision

Polynom: $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ $\quad ; a_i \in \mathbb{R} ; i = 0, 1, \ldots, n$

① $(x^3 + x^2y - 3xy^2 + y^3) : (x-y) = x^2 + 2xy - y^2$

$$-(x^3 - x^2y)$$
$$(2x^2y - 3xy^2)$$
$$-(2x^2y - 2xy^2)$$
$$-xy^2 + y^3$$
$$-(-xy^2 + y^3)$$
$$0$$

② $(x^3 - 6x^2 + 9x - 4) : (x-1) = x^2 - 5x + 4$

③ $(x^3 - y^3) : (x-y) = x^2 - xy + y^2$

④ $(x^3 + y^3) : (x+y) = x^2 + xy + y^2$