# Körperaxiome

Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Eigenschaften.

| | | |
|---|---|---|
| (K1) | $x + (y + z) = (x + y) + z$, | (*Assoziativität*) |
| (K2) | $x + y = y + x$, | (*Kommutativität*) |
| (K3) | Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$, so dass $x + 0 = x$ (für alle $x \in \mathbb{R}$), | (*Existenz der Null*) |
| (K4) | Es gibt ein $-x \in \mathbb{R}$ mit $x + (-x) = 0$, | (*Existenz additiver Inverser*) |
| (K5) | $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, | (*Assoziativität*) |
| (K6) | $x \cdot y = y \cdot x$, | (*Kommutativität*) |
| (K7) | Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, so dass $x \cdot 1 = x$ (für alle $x \in \mathbb{R}$), | (*Existenz der Eins*) |
| (K8) | Falls $x \neq 0$, dann existiert ein $x^{-1} \in \mathbb{R}$, so dass $x \cdot x^{-1} = 1$, | (*Existenz multiplikativer Inverser*) |
| (K9) | $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, | (*Distributivität*) |

# Folgerungen

- 0 und 1 sind eindeutig bestimmt, ebenso additive und multiplikative Inverse.
  (abkürzende Notation: $\frac{y}{x} := x^{-1} \cdot y$)
- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- $x \cdot 0 = 0$,
- $-x = (-1) \cdot x$,
- $-(-x) = x$, $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.
- $x \cdot y = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = 0$.
- Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $a + x = b$ eindeutig lösbar.
  Falls $a \neq 0$, dann ist auch $ax = b$ eindeutig lösbar.
- $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$, falls $x \neq 0$,
- $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$, falls $x \neq 0, y \neq 0$.

# Ordnungsaxiome

Desweiteren sind in $\mathbb{R}$ gewisse Elemente als positiv ausgezeichnet.
Notation: $> 0$

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten folgende Eigenschaften.

(O1) Es gilt immer genau eine der drei Beziehungen
$x > 0, \quad x = 0, \quad -x > 0.$ (*Trichotomie*)

(O2) Aus $x > 0$ und $y > 0$ folgt $x + y > 0$ und $x \cdot y > 0$.

# Definition

Für $x, y \in \mathbb{R}$ definiert man

- $x - y := x + (-y)$,
- $x > y$, falls $x - y > 0$,
- $x < y$, falls $y > x$,
- $x \geq y$, falls $x > y$ oder $x = y$,
- $x \leq y$, falls $x < y$ oder $x = y$.

# Folgerungen

Es ergeben sich nun zum Beispiel folgende Regeln, wobei $x, y, a, b \in \mathbb{R}$:

- Für $x, y$ gilt immer genau eine der Relationen
$$x < y, \quad x = y, \quad y < x.$$
- Falls $x < y$ und $y < z$, dann ist $x < z$. (*Transitivität*)
- Falls $x < y$, dann ist $a + x < a + y$.
- Falls $x < y$, dann ist $-x > -y$.
- Falls $x < y$ und $a < b$, dann ist $x + a < y + b$.
- Falls $x < y$ und $a > 0$, dann ist $ax < ay$.
- Falls $x < y$ und $a < 0$, dann ist $ax > ay$.
- Falls $0 \leq x < y$ und $0 \leq a < b$, dann ist $ax < by$.
- $x > 0$ genau dann, wenn $x^{-1} > 0$.
- Falls $0 < x < y$, dann ist $x^{-1} > y^{-1}$.

# Bemerkung

**Notation:**

- Statt $x \cdot y$ schreibt man meistens nur $xy$.

# Archimedisches Axiom

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt Folgendes.

(A) Sind $x, y > 0$, so existiert eine natürliche Zahl $n$ mit $n \cdot x > y$.

**Folgerung**
Zu jedem $\epsilon > 0$ exisitert eine natürliche Zahl $n > 0$ mit

$$\frac{1}{n} < \epsilon.$$

(nimm $x = \epsilon, y = 1$ in (A))

# Intervalle

## Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Dann definiere

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, (abgeschlossenes Intervall)
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, (offenes Intervall)
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, (nach rechts halboffenes Intervall)
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, (nach links halboffenes Intervall)

$a$ und $b$ sind die *Randpunkte* des Intervalls $I$ und $|I| := b - a$ ist die *Länge* des Intervalls $I$.

# Uneigentliche Intervalle

## Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann definiere

- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$,
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,
- $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$,
- $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$.

# Intervallschachtelung

## Definition

Eine *Intervallschachtelung* ist eine Folge abgeschlossener Intervalle $I_1, I_2, I_3, \ldots$ mit den Eigenschaften

1. $I_{n+1} \subseteq I_n$ für $n \in \mathbb{N}$.
2. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Intervall $I_n = [a_n, b_n]$ mit $b_n - a_n < \epsilon$.

Notation: $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(I_n)$.

# Intervallschachtelungsprinzip

(IP) Zu jeder Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ gibt es genau eine reelle Zahl, die allen ihren Intervallen angehört.

# Literatur


- O. Forster, *Analysis 1*, Vieweg, 2008.
- K. Königsberger, *Analysis 1*, Springer-Verlag, 2004.