

1 Direkte, indirekte Beweise und vollständige Fallunterscheidung

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Addiert man drei aufeinander folgende ganze Zahlen, ist das Ergebnis durch 3 teilbar.
2. Es gibt unendlich viele Primzahlen.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}$:
 - (a) $|x| \geq 0$
 - (b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
 - (c) $|x - y| = |y - x|$ (Nutzen Sie die Aussage (b))
 - (d) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

2 Vollständige Induktion

Zeigen Sie durch vollständige Induktion folgende Aussagen:

1. $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$
2. $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$
3. $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2 \cdot (n + 1)^2}{4}$
4. $n^2 + n$ ist gerade
5. $4n^3 - n$ ist durch 3 teilbar
6. $5^n + 7$ ist durch 4 teilbar
7. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10 : 2^n > n^3$