Serie 03, Aufgabe 4

a) Sei $M := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ und $(a,b)R(c,d)$ genau dann, wenn $ad = cb$. $(*)$

Seien $[(a,b)] = [(a',b')]$ und $[(c,d)] = [(c',d')]$, also wegen $(*)$: $ab' = a'b$ und $cd' = c'd$ $(**)$

Addition:

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(ad+cb, bd)] \text{ und } [(a',b')] + [(c',d')] = [(a'd'+c'b', b'd')]$$

Zu zeigen: $[(ad+cb,bd)] = [(a'd'+c'b',b'd')]$, also wegen $(*)$: $(ad+cb)b'd' = (a'd'+c'b')bd$.

Beweis:

$$\begin{aligned}(ad+cb)b'd' &\overset{\text{(D)}}{=} adb'd' + cbb'd' \\ &\overset{\text{(K)}}{=} ab'dd' + cd'bb' \\ &\overset{(**)}{=} a'bdd' + c'dbb' \\ &\overset{\text{(K)}}{=} a'd'bd + c'b'bd \overset{\text{(D)}}{=} (a'd'+c'b')bd\end{aligned}$$

□

Multiplikation:

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(ac,bd)] \text{ und } [(a',b')] \cdot [(c',d')] = [(a'c',b'd')]$$

Zu zeigen: $[(ac,bd)] = [(a'c',b'd')]$, also wegen $(*)$: $acb'd' = a'c'bd$.

Beweis:

$$\begin{aligned}acb'd' &\overset{\text{(K)}}{=} ab'cd' \\ &\overset{(**)}{=} a'bc'd \\ &\overset{\text{(K)}}{=} a'c'bd\end{aligned}$$

□

b) Das Neutralelement der Addition ist: $[(e_1,e_2)] = [(0,1)]$

Nachweis: $[(a,b)]+[(0,1)] = [(a\cdot 1+b\cdot 0, b\cdot 1)] = [(a+0,b)] = [(a,b)]$, dies gilt für alle $[(a,b)] \in M/\sim$.

Hier sind zum Beispiel $(0,1),(0,3),(0,-8),(0,123) \in [(0,1)]$.

Das Neutralelement der Multiplikation ist: $[(f_1,f_2)] = [(1,1)]$

Nachweis: $[(a,b)] \cdot [(1,1)] = [(a\cdot 1, b\cdot 1)] = [(a,b)]$, dies gilt für alle $[(a,b)] \in M/\sim$

Hier sind zum Beispiel $(1,1),(4,4),(-7,-7),(23,23) \in [(1,1)]$.