Verzweigungsprozesse und einige Anwendungen

Andrej Depperschmidt

Vorlesungsskript

Universität Freiburg

Wintersemester 2014/15

Version: 15. September 2015

1 Bienaymé-Galton-Watson-Prozesse

Bienaymé-Galton-Watson-Prozess ist der älteste und der einfachste Verzweigungsprozess. F. Galton betrachtete das Aussterben von Familiennamen und veröffentlichte zusammen mit H.W. Watson in 1874 die Arbeit *On the probability of extinction of families.* Erst 1972 fand man heraus, dass I.J. Bienaymé dasselbe Problem schon 1845 betrachtete. Aus diesem Grund sind mittlerweile beide Bezeichnungen, d.h. sowohl Galton-Watson, als auch Bienaymé-Galton-Watson-Prozess im Gebrauch.

Man kann ein Bienaymé-Galton-Watson-Prozess (BGWP) wie folgt beschreiben: Wir starten mit einem Individuum. Es lebt genau eine Zeiteinheit und hinterlässt nach seinem Tod Nachkommen dessen Anzahl gemäß einer festgelegten Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ verteilt ist. Dann verhalten sich die Nachkommen wie unabhängige Kopien (auch unabhängig vom Vorfahr) ihres Vorfahren, d.h. jeder von denen lebt genau eine Zeiteinheit und hinterlässt Nachkommen gemäß derselben Verteilung. Deren Nachkommen verhalten sich wieder wie unabhängige Kopien des Vorfahren u.s.w. In diesem Kapitel definieren wir den BGWP und studieren die Aussterbe- bzw. die Überlebenswahrscheinlichkeiten und das asymptotische Verhalten in Abhängigkeit der Nachkommensverteilung.

1.1 Definition und elementare Eigenschaften

Hier definieren wir den Bienaymé-Galton-Watson-Prozess (BGWP) und diskutieren die ersten elementaren Eigenschaften.

Definition 1.1 (BGWP). Es sei Z_0 eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable und sei $\{\xi_{nk} : n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}\}$ eine Familie von unabhängigen und identisch verteilten (u.i.v.) Zufallsvariablen mit Verteilung $p_j = \mathbf{P}(\xi_{nk} = j)$, $j \in \mathbb{N}_0$. Der *Bienaymé-Galton-Watson-Prozess (auch Verzweigungsprozess)* mit Start in Z_0 und Nachkommensverteilung $\{p_j : j \in \mathbb{N}_0\}$ ist eine Markovkette $(Z_n)_{n\geq 0}$ die durch

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} \xi_{nk}, \quad n \geq 0 \tag{1.1}$$

rekursiv definiert ist. Ferner definieren wir $m := \mathbf{E}[\xi_{11}]$ und $\sigma^2 := \mathbf{Var}[\xi_{11}]$. Wir nennen einen BGWP *superkritisch* falls $m > 1$, *kritisch* falls $m = 1$, und *subkritisch* falls $m < 1$ ist (diese Bezeichnungen werden später klar).

Wir werden stets $m < \infty$ annehmen, $\sigma^2 = \infty$ ist dagegen bei manchen Resultaten möglich. In der obigen Definition interpretieren wir Z_n als die Populationsgröße zur Zeit n und ξ_{nk} als die Anzahl der Nachkommen des k-ten Individuums der n-ten Generation. Wie schon erwähnt ist $(Z_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette. Die zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten sind gegeben durch

$$p_{ij} := \mathbf{P}(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = \begin{cases} (p^{*i})_j & \text{falls } i \geq 1, j \geq 0 \\ \delta_{0j} & \text{falls } i = 0, j \geq 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta ist und p^{*i} die i-fache Faltung von $\{p_j : j = 0, 1, \ldots\}$ bezeichnet. Der Erweiterungssatz von Kolmogorov garantiert die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ auf dem man die Folge $(Z_n)_{n\geq 0}$ definieren kann. Wir bezeichnen mit $(\mathcal{F}_n)_{n=0,1,\ldots}$ die *natürliche Filtration* von $(Z_n)_{n=0,1,\ldots}$, d.h. $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_k : 0 \leq k \leq n)$. Falls wir den Anfangswert der Population betonen möchten, schreiben wir oft $\mathbf{P}_i$ für die Verteilung von $(Z_n)_{n\geq 0}$ wenn $Z_0 = i$ ist. Den zugehörigen Erwartungswert und die Varianz bezeichnen wir dann entsprechend mit $\mathbf{E}_i$ bzw. $\mathbf{Var}_i$.

Bemerkung 1.2 (Absorption und Transienz). Natürlich ist 0 ein absorbierender Zustand der Markovkette (Z_n). Alle anderen Zustände sind *transient*, d.h. sie werden mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich viele Male besucht. Für $k \geq 1$ gilt nämlich

$$\mathbf{P}(Z_{n+i} \neq k, i \geq 1 | Z_n = k) \geq \begin{cases} p_0^k & \text{falls } p_0 > 0, \\ 1 - p_1^k & \text{falls } p_0 = 0. \end{cases}$$

Hier ist p_0^k die Wahrscheinlichkeit, dass alle k Individuen in einem Schritt aussterben ohne Nachkommen zu produzieren und $1 - p_1^k$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der k Individuen mehr als einen Nachkommen hat. In jedem Fall ist die rechte Seite im letzten Display positiv, was die Transienz zeigt. Insbesondere gilt für alle $k \geq 1$ (u.o. steht für unendlich oft)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n = k) = \mathbf{P}(Z_n = k \text{ u.o. }) = 0.$$

Bemerkung 1.3 (Triviale Spezialfälle).

(i) Falls $p_j = 1$ für ein $j \in \mathbb{N}_0$ ist, dann ist (bis auf möglicherweise zufällige Anfangsverteilung) die Markovkette (Z_n) deterministisch: jedes Individuum stirbt nach einer Zeiteinheit und bekommt j Nachkommen mit Wahrscheinlichkeit 1.

(ii) Falls $p_0, p_1 \in (0, 1)$ und $p_0 + p_1 = 1$ ist, dann ist die Evolution der Population auch nicht interessant, denn dann stirbt jede der Z_0 ursprünglichen Familien nach jeweils einer geometrischen Anzahl von Versuchen mit Parameter p_0 aus.

Annahme 1.4. *Wir nehmen stets an, dass $p_j \neq 1$ für alle j und $p_0 + p_1 < 1$ gilt.*

Bemerkung 1.5 (Additivität). Wegen der Unabhängigkeit ist

$$Z_n = \sum_{j=1}^{Z_0} Z_n^{(j)},$$

wobei $Z_n^{(j)}$ die Nachkommen des j-ten Individuums der 0-ten in der n-ten Generation sind. Damit ist $(Z_n)_{n\geq 0}$ Summe von Z_0 u.i.v. BGWP die jeweils in 1 starten. Daher nehmen wir im Folgenden meistens $Z_0 = 1$ an. Allgemeine Resultate folgen oft aus diesem Spezialfall.

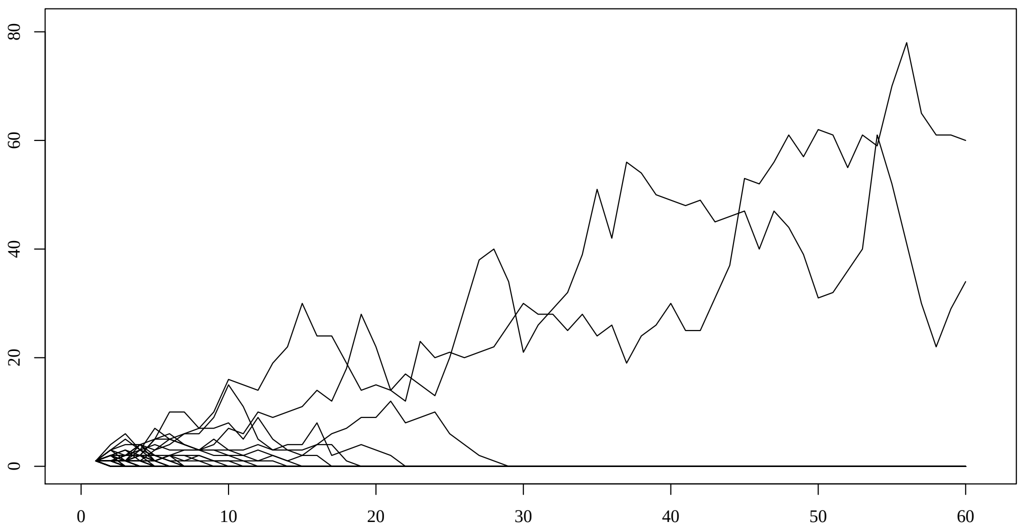

Abbildung 1.1: Realisierungen von 50 kritischen BGWP mit Start in 1. Die Nachkommensverteilung ist Pois(1).

Beispiel 1.6 (binäres Verzweigen)**.** Es sei $p \in (0,1)$ und sei $p_0 = 1 - p$ und $p_2 = p$, dann gilt

$$\mathbf{P}_j(Z_1 = k) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ \binom{j}{k/2} p^{k/2}(1-p)^{j-k/2} & \text{falls } k \text{ gerade,} \end{cases}$$

wobei $\binom{j}{i} = 0$ ist wenn $i > j$. Mit $k_0 = 1/2$ (so lässt sich die Formel kompakter schreiben) gilt

$$\mathbf{P}_1(Z_1 = 2k_1, Z_2 = 2k_2, \ldots, Z_n = 2k_n) = \prod_{i=1}^{n} \binom{2k_{i-1}}{k_i} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\sum_{i=1}^{n} k_i} (1-p)^{2\sum_{i=0}^{n-1} k_i}.$$

Weitere Beispiele von BGWP ergeben sich mit anderen Nachkommensverteilungen wie Poissonverteilung, Binomialverteilung etc. Diese werden wir uns in einigen Übungen anschauen. Übung 1.21 liefert ein weniger offensichtliches Beispiel für einen BGWP und einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen BGWP und "nächste Nachbarn" Irrfahrten auf den ganzen Zahlen.

1.2 Erzeugende Funktionen

In diesem Abschnitt erinnern wir an die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen, die genauso wie momentenerzeugende und charakteristische Funktionen eine wichtige Rolle in der Wahrscheinlichkeitstheorie spielen, und sich besonders gut für die Analyse von Verzweigungsprozessen eignen.

Definition 1.7 (erzeugende Funktion)**.** Es sei X eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable. Dann ist die *(wahrscheinlichkeits)erzeugende Funktion* definiert durch

$$g_X(t) := \mathbf{E}[t^X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = k)t^k, \quad t \in [0,1]. \tag{1.3}$$

Lemma 1.8. *Es sei X eine $\mathbb{N}_0$-wertige ZV mit $\mathbf{E}[X] < \infty$, dann gilt*

$$\mathbf{E}[X] = g'_X(1)$$

und

$$\mathbf{Var}[X] = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2,$$

wobei die letzte Gleichung in dem Sinne gilt, dass wenn die eine Seite endlich ist, dann ist auch die andere endlich und die beiden sind gleich. Insbesondere gilt $g''_X(t) \to \infty$ für $t \uparrow 1$ falls $\mathbf{Var}[X] = \infty$.

Beweis. Für $t \in (0,1)$ gilt

$$g'_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}(X = k)t^{k-1} \xrightarrow{t\uparrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{E}[X].$$

Der Beweis der zweiten Formel ist eine Übungsaufgabe. □

Lemma 1.9. *Es seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. $\mathbb{N}_0$-wertige ZV mit erzeugender Funktion g_X und sei Y auch $\mathbb{N}_0$-wertig und unabhängig mit erzeugender Funktion g_Y. Mit $S = \sum_{k=1}^{Y} X_k$ gilt*

$$\begin{aligned} g_S(t) &= g_Y \circ g_X(t), \quad t \in [0,1], \\ \mathbf{E}[S] &= \mathbf{E}[X_1]\mathbf{E}[Y], \\ \mathbf{Var}[S] &= \mathbf{Var}[X_1]\mathbf{E}[Y] + (\mathbf{E}[X_1])^2\,\mathbf{Var}[Y], \end{aligned}$$

wobei die letzten zwei Gleichungen in dem Sinne gelten, dass wenn die eine Seite endlich ist, dann ist auch die andere endlich und die beiden sind gleich.

Beweis. Wir zeigen nur die erste Gleichung. Die beiden anderen Gleichungen können daraus mit Hilfe von Lemma 1.8 gefolgert werden (Übung!). Es gilt

$$\begin{aligned} g_S(t) = \mathbf{E}[t^S] = \mathbf{E}[t^{\sum_{k=1}^{Y} X_k}] &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}[t^{\sum_{k=1}^{j} X_k}]\mathbf{P}(Y = j) = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} \mathbf{E}[t^{X_k}]\mathbf{P}(Y = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{E}[t^{X_1}])^j \mathbf{P}(Y = j) = \sum_{j=0}^{\infty} (g_X(t))^j \mathbf{P}(Y = j) = g_Y(g_X(t)). \end{aligned}$$

□

Nun betrachten wir die erzeugenden Funktionen von Z_n. Dazu setzen wir $g_n(t) = \mathbf{E}_1[t^{Z_n}]$ und $g(t) = g_1(t) = g_{\xi_{11}}(t)$, wobei ξ_{11} wie in Definition 1.1 ist. Wenden wir Lemma 1.9 auf (1.1) an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} g_n &= g_{n-1} \circ g = \cdots = g \circ g_{n-1} \\ \mathbf{E}[Z_n] &= m\mathbf{E}[Z_{n-1}] \\ \mathbf{Var}[Z_n] &= \sigma^2 \mathbf{E}[Z_{n-1}] + m^2 \mathbf{Var}[Z_{n-1}]. \end{aligned}$$

Rekursiv erhält man daraus den folgenden Satz.

Satz 1.10. *Wenn $Z_0 = 1$ ist, dann ist die erzeugende Funktion von Z_n gegeben durch $g \circ \ldots \circ g$ (n mal) und es gilt*

$$\mathbf{E}[Z_n] = m^n, \tag{1.4}$$

$$\mathbf{Var}[Z_n] = \begin{cases} \frac{\sigma^2 m^{n-1}(m^n-1)}{m-1} & : \text{falls } m \neq 1, \\ n\sigma^2 & : \text{falls } m = 1. \end{cases} \tag{1.5}$$

Beweis. Bis auf die Formel für die Varianz sind alle Aussagen klar. Für die Varianz kann man sich überlegen (Übung!), dass

$$\mathbf{Var}[Z_n] = \sigma^2(m^{n-1} + \ldots + m^{2n-2}) = \sigma^2 m^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} m^k$$

gilt. Mit der Formel für die (endliche) geometrische Summe erhält man die Behauptung. □

Bemerkung 1.11 (Einfache Schranken im subkritischen Fall). Wenn $m < 1$ ist, dann gilt

$$\mathbf{E}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} Z_n\Big] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}[Z_n] = \frac{1}{1-m} < \infty.$$

Insbesondere folgt

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} Z_n < \infty\Big) = 1.$$

Mit der Markov-Ungleichung gilt

$$\mathbf{P}(Z_n > 0) = \mathbf{P}(Z_n \geq 1) \leq \mathbf{E}[Z_n] = m^n.$$

Natürlich ist auch diese Ungleichung nur im subkritischen Fall nützlich.

Übung 1.12. Für nichtnegative Zufallsvariablen X mit $\mathbf{P}(X = 0) < 1$ und endlichem zweiten Moment gilt die Ungleichung (dies ist eine Version der Paley-Zygmund Ungleichung)

$$\mathbf{P}(X > 0) \geq \frac{(\mathbf{E}[X])^2}{\mathbf{E}[X^2]}.$$

Geben Sie mit Hilfe dieser Ungleichung *untere Schranken* für $\mathbf{P}(Z_n > 0)$ an, wobei $(Z_n)_{n=0,1,\ldots}$ ein BGWP mit $Z_0 = k$, $m \in (0, \infty)$ und $\sigma^2 < \infty$.

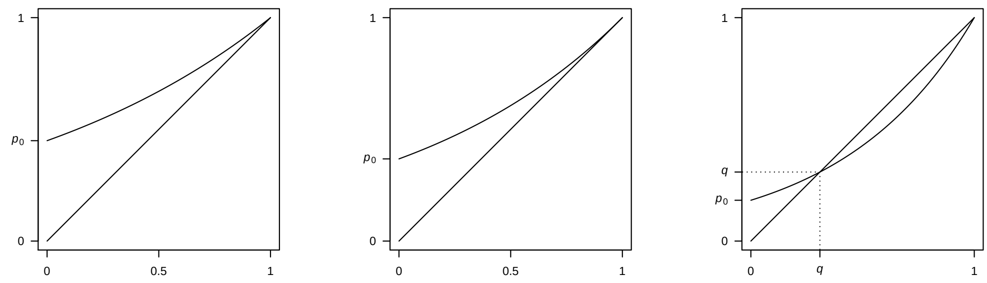

Abbildung 1.2: Beispiele erzeugender Funktionen im subkritischen, kritischen und superkritischen Fall. Die Nachkommensverteilungen sind hier Pois(0.8), Pois(1) und Pois(1.7).

Lemma 1.13 (Eigenschaften von g). *Unter der Annahme 1.4* $0 < p_0 \leq p_0 + p_1 < 1$ *(die ab jetzt stillschweigend vorausgesetzt wird) gilt*

(i) g *ist strikt konvex und wachsend in* $[0, 1]$*;*

(ii) $g(0) = p_0, g(1) = 1$*;*

(iii) ist $m \leq 1$*, so gilt* $g(t) > t$ *für* $t \in [0, 1)$*;*

(iv) ist $m > 1$*, dann hat* $g(t) = t$ *genau eine Lösung in* $(0, 1)$.

Beweis. (i) Wegen $p_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ und Annahme 1.4 ist $p_k > 0$ für ein $k \geq 2$. Damit sind $g'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k k t^{k-1}$ und $g''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} p_k k(k-1)t^{k-2}$ positiv auf $(0, 1]$.

(ii) ist klar.

(iii) Wenn $g'(1) = m \leq 1$ ist, dann gilt $(g(t) - t)' = g'(t) - 1 < g'(1) - 1 \leq 0$. Damit ist $t \mapsto g(t) - t$ strikt fallend und wegen $g(1) = 1$ folgt $g(t) > t$ für $t \in [0, 1)$.

(iv) Wegen Konvexität gibt es höchstens zwei Lösungen der Gleichung $g(t) = t$. Eine davon ist in $t = 1$. Aus $g'(1) > 1$ und $g(0) = p_0 > 0$ folgt, dass es noch eine Lösung in $(0, 1)$ gibt.

□

Es sei q die kleinste Lösung der Gleichung $g(t) = t$ in $[0, 1]$, dann gilt nach dem obigen Lemma: Ist $m \leq 1$, dann ist $q = 1$; ist $m > 1$, dann ist $q < 1$ (siehe Abbildung 1.2). Nach dem folgenden Lemma ist q ein attraktiver Gleichgewicht des, durch g definierten, dynamischen Systems $x_{n+1} = g(x_n)$, $x_0 \in [0, 1]$.

Lemma 1.14. *(i) Ist* $t \in [0, q)$*, so gilt* $g_n(t) \uparrow q$ *für* $n \to \infty$.

(ii) Ist $t \in (q, 1)$*, so gilt* $g_n(t) \downarrow q$ *für* $n \to \infty$.

(iii) Ist $t \in \{q, 1\}$*, so gilt* $g_n(t) = t$ *für alle* n.

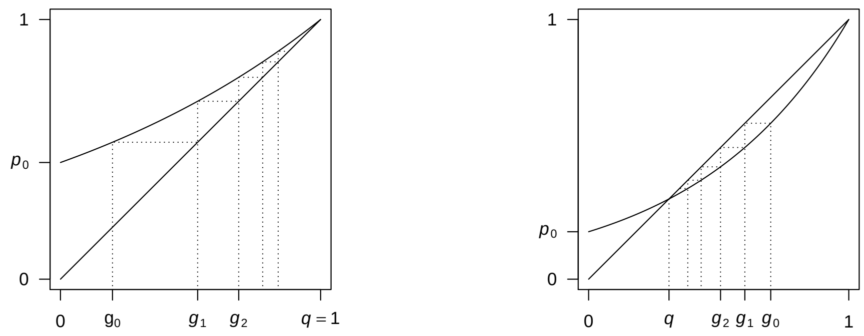

Abbildung 1.3: Konvergenz von $g_n(s)$ gegen q. Für ein Startwert $s \in (0,1)$ ist hier $g_n := g_n(s)$ mit $g_0(s) = s$.

(iv) *Ist $m > 1$, so gilt $g'(q) < 1$ und für alle $t \in [0, q)$*

$$0 < q - g_n(s) < \left(g'(q)\right)^n, \quad n \geq 1. \tag{1.6}$$

Beweis. (i) Für $0 \leq t < q$ gilt nach Lemma 1.13 $t < g(t) < g(q)$ und es folgt

$$t < g_1(t) < g_2(t) < \ldots < g_n(t) < g_n(q) = q$$

für alle $n \geq 1$. Damit gilt $g_n(t) \uparrow L$ für ein $L \leq q$. Da g stetig ist gilt aber $L = \lim_{n\to\infty} g_n(t) = \lim_{n\to\infty} g_{n+1}(t) = g\left(\lim_{n\to\infty} g_n(t)\right) = g(L)$. Nach Voraussetzung ist q die kleinste Lösung in $[0,1]$ und somit gilt $L = q$.

(ii) Ist $q < t < 1$, dann zeigt man mit einem ähnlichen Argument, dass $1 > g_n(t) \downarrow L \geq q$ ist und $L = g(L)$. Nach Lemma 1.13 gibt es in $(q, 1)$ keine weitere Lösungen, was $L = q$ impliziert.

(iii) ist klar.

(iv) Im Fall $m > 1$ ist $q < 1$ und wegen strikter Konvexität von g gilt

$$g'(q) < \frac{g(1) - g(q)}{1 - q} = 1.$$

Für $t \in [0, q)$ impliziert strikte Konvexität

$$0 < \frac{g(q) - g(t)}{q - t} = \frac{q - g(t)}{q - t} < g'(q).$$

Mit $g_0(t) = t$ und Teleskopprodukt erhalten wir

$$0 < \frac{q - g_n(t)}{q - t} = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{q - g(g_j(t))}{q - g_j(t)} < \left(g'(q)\right)^n.$$

Das zeigt (1.6).

□

1.3 Aussterbewahrscheinlichkeit

In diesem kurzen Abschnitt identifizieren wir die kleinste Lösung der Fixpunktgleichung $g(t) = t$ als die Aussterbewahrscheinlichkeit des Verzweigungsprozesses dessen Nachkommensverteilung die erzeugende Funktion g hat.

Definition 1.15. Das *Aussterbeereignis* des Verzweigungsprozesses $(Z_n)_{n\geq 0}$ ist definiert durch

$$Q := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\{Z_k = 0\} = \left\{Z_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\right\} = \{\text{ es gibt ein } N \text{ mit } Z_n = 0 \text{ für alle } n \geq N\}$$

und dessen Wahrscheinlichkeit heißt *Aussterbewahrscheinlichkeit.*

Da aus $Z_k = 0$ stets $Z_n = 0$ für $n \geq k$ folgt, gilt auch

$$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{Z_n = 0\}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Q) &= \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n}\{Z_k = 0\}\Big) = \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(Z_k = 0 \text{ für ein } 1 \leq k \leq n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(Z_n = 0) = \lim_{n\to\infty} g_n(0).\end{aligned}$$

Mit Lemma 1.14 folgt also das folgende Resultat.

Satz 1.16. *Die Aussterbewahrscheinlichkeit eines Verzweigungsprozesses $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit $Z_0 = 1$ ist die kleinste Lösung q von $g(t) = t$ in $[0,1]$. Dabei ist $q = 1$, wenn $m \leq 1$ ist, und $q < 1$, wenn $m > 1$ ist.*

Übung 1.17. Zeigen Sie: Für jeden BGWP mit $p_1 \neq 0$ gilt

$$\frac{p_0}{1-p_1} \leq q \leq \frac{p_0}{1-p_0-p_1}. \tag{1.7}$$

Übung 1.18. Es sei $Z := (Z_n)_{n=0,1,2,\dots}$ ein BGWP mit Nachkommensverteilung $(p_j)_{j=0,1,\dots}$ gegeben durch

$$p_0, p_2 > 0,\ p_1 \geq 0 \ \text{ und } \ p_j = 0,\ j \geq 3.$$

Wann ist dieser BGWP kritisch, sub- oder superkritisch? Bestimmen Sie zunächst die Aussterbewahrscheinlichkeit von Z für den Fall $Z_0 = 1$ und dann für den Fall $Z_0 = k$. Wie verhält sich diese Größe für $k \to \infty$?

Übung 1.19. Es sei $Z := (Z_n)_{n=0,1,\dots}$ ein BGWP mit geometrischer Nachkommensverteilung, d.h. für ein $a \in (0,1)$ ist $p_k = (1-a)a^k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Berechnen Sie die Aussterbewahrscheinlichkeit q.

Übung 1.20. Es sei $Z := (Z_n)_{n=0,1,\dots}$ ein BGWP mit Poissonscher Nachkommensverteilung, d.h. für ein $\lambda > 0$ ist $p_k = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie $q < 1/\lambda$.

Übung 1.21 (BGWP in einfacher Irrfahrt)**.** Für $p \in (0, 1/2]$ sei $(X_n)_{n=0,1,\dots}$ eine Irrfahrt auf den ganzen Zahlen mit $X_0 = 1$ und

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i) = p \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(X_{n+1} = i - 1 | X_n = i) = 1 - p.$$

Ferner sei $T := \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$ und sei $Z := (Z_n)_{n=0,1,\dots}$ definiert durch $Z_0 = 1$ und

$$Z_n = \sum_{k=0}^{T-1} \mathbb{1}_{\{X_k = n \text{ und } X_{k+1} = n+1\}}.$$

Also ist Z_n die Anzahl der Schritte der Irrfahrt von n nach $n+1$ bevor die 0 zum ersten Mal erreicht wird. Zeigen Sie, dass $(Z_n)_{n=0,1,\dots}$ ein BGWP mit geometrischen Nachkommensverteilung ist.

1.4 Kritische Verzweigungsprozesse

Hier betrachten wir genauer den *kritischen* Fall $m = 1$. Wir wissen bereits, dass Folgendes gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n \to 0) &= 1, \\ \mathbf{E}[Z_n] &= 1, \\ \mathbf{Var}[Z_n] &\to \infty. \end{aligned}$$

Es gilt also $\mathbf{P}(Z_n > 0) \to 0$ und wenn $Z_n > 0$ sollte man wegen der großen Varianz auch große Werte von Z_n erwarten. Was das genau bedeutet, sowie die Konvergenzrate von $\mathbf{P}(Z_n > 0)$ gegen 0, werden wir uns im Satz 1.23 genauer anschauen. Zuvor beweisen wir ein wichtiges Hilfsresultat.

Lemma 1.22. *Für $m = 1$ und $\sigma^2 < \infty$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1 - g_n(s)} - \frac{1}{1-s}\right] = \frac{\sigma^2}{2} \tag{1.8}$$

gleichmäßig in $s \in [0, 1)$.

Beweis. Es sei $s \in [0, 1)$. Mit Taylorentwicklung in 1 gilt

$$g(s) = g(1) + g'(1)(s-1) + \frac{g''(1)}{2}(1-s)^2 + r(s)(1-s)^2,$$

für ein r mit $\lim_{s\uparrow 1} r(s) = 0$. Mit $g(1) = 1, g'(1) = m = 1$ und $\sigma^2 = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2 = g''(1)$ (siehe Lemma 1.8) erhalten wir

$$g(s) = s + \frac{\sigma^2}{2}(1-s)^2 + r(s)(1-s)^2.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-g(s)} - \frac{1}{1-s} &= \frac{g(s)-s}{(1-g(s))(1-s)} = \frac{\frac{\sigma^2}{2}(1-s)^2 + r(s)(1-s)^2}{(1-g(s))(1-s)} \\ &= \frac{1-s}{1-g(s)}\left(\frac{\sigma^2}{2} + r(s)\right) = \frac{\sigma^2}{2} + \rho(s),\end{aligned}$$

wobei

$$\rho(s) := \frac{1}{1-g(s)} - \frac{1}{1-s} - \frac{\sigma^2}{2} = \frac{1-s}{1-g(s)}\left(\frac{\sigma^2}{2} + r(s)\right) - \frac{\sigma^2}{2} \to 0 \qquad \text{für } s \uparrow 1.$$

Letzter Schritt folgt mit $(1-g(s))/(1-s) = (g(1)-g(s))/(1-s) \to g'(1) = 1$ für $s \uparrow 1$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1-g_n(s)} - \frac{1}{1-s}\right] &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\frac{1}{1-g(g_j(s))} - \frac{1}{1-g_j(s)}\right] \\ &= \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho(g_j(s)).\end{aligned}$$

Da $g_n(0) \le g_n(s) \le 1$ und $g_n(0) \uparrow 1$ ist die Konvergenz $g_n(s) \to 1$ uniform in $s \in [0,1)$. Da ρ beschränkt ist folgt die Behauptung. □

Satz 1.23. *Ist $m = 1$ und $\sigma^2 < \infty$, so gilt*

(i) $\lim_{n\to\infty} n\mathbf{P}(Z_n > 0) = \frac{2}{\sigma^2}$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\frac{Z_n}{n} | Z_n > 0\right] = \frac{\sigma^2}{2}$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{Z_n}{n} \le u | Z_n > 0\right) = 1 - e^{-2u/\sigma^2}, u \ge 0$, *d.h. bedingt auf* $\{Z_n > 0\}$ *konvergiert die Folge* $(Z_n/n)_{n=1,2,\dots}$ *für* $n \to \infty$ *in Verteilung gegen eine exponentiell verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert* $\sigma^2/2$.

Beweis. (i) Mit $s = 0$ in (1.8) gilt

$$n\mathbf{P}(Z_n > 0) = n(1-g_n(0)) = \left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-g_n(0)} - 1\right) + \frac{1}{n}\right]^{-1} \to \frac{2}{\sigma^2}.$$

(ii) Allgemein gilt für Verzweigungsprozesse $\mathbf{E}[Z_n] = \mathbf{E}[Z_n|Z_n > 0]\mathbf{P}(Z_n > 0) + 0 \cdot \mathbf{P}(Z_n = 0)$ und somit $\mathbf{E}[Z_n|Z_n > 0] = \mathbf{E}[Z_n]/\mathbf{P}(Z_n > 0)$. Damit und mit (i) erhalten wir

$$\mathbf{E}\left[\frac{Z_n}{n}|Z_n > 0\right] = \frac{1}{n\mathbf{P}(Z_n > 0)} \to \frac{\sigma^2}{2}.$$

(iii) Wir zeigen, dass die bedingte Laplace-Transformierte $\mathbf{E}[\exp(-uZ_n/n)|Z_n > 0]$ gegen die Laplace-Transformierte der Exponentialverteilung mit Erwartungswert $\sigma^2/2$ konvergiert. Letztere ist gegeben durch

$$u \mapsto \int_0^\infty e^{-ux} \frac{2}{\sigma^2} e^{-\frac{2}{\sigma^2}x}\, dx = \frac{1}{1 + u\sigma^2/2}.$$

Wenn $u = 0$ ist, dann ist nichts zu zeigen. Für $u > 0$ gilt

$$\begin{aligned} g_n(\exp(-u/n)) &= \mathbf{E}\left[\exp(-u/n)^{Z_n}\right] = \mathbf{E}[\exp(-uZ_n/n)] \\ &= \mathbf{E}[\exp(-uZ_n/n)|Z_n > 0]\, \mathbf{P}(Z_n > 0) + 1 \cdot \mathbf{P}(Z_n = 0) \\ &= \mathbf{E}[\exp(-uZ_n/n)|Z_n > 0]\, (1 - g_n(0)) + g_n(0). \end{aligned}$$

Nun können wir nach dem bedingten Erwartungswert auflösen und erhalten

$$\mathbf{E}[\exp(-uZ_n/n)|Z_n > 0] = \frac{g_n(\exp(-u/n)) - g_n(0)}{1 - g_n(0)} = 1 - \frac{1 - g_n(\exp(-u/n))}{1 - g_n(0)}.$$

Den zweiten Term können wir wie folgt umschreiben

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n(1 - g_n(0))} \left[\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - g_n(\exp(-u/n))}\right]^{-1} \\ &= \frac{1}{n(1 - g_n(0))} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 - g_n(\exp(-u/n))} - \frac{1}{1 - \exp(-u/n)}\right) + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \exp(-u/n)}\right]^{-1} \\ &\xrightarrow{n \to \infty} \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{u}\right)^{-1} = \frac{\sigma^2 u}{\sigma^2 u + 2} = 1 - \frac{1}{\sigma^2 u/2 + 1}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\mathbf{E}[\exp(-uZ_n/n)|Z_n > 0] \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{\sigma^2 u/2 + 1}.$$

□

1.5 Wichtiges Lemma

Bevor wir mit den sub- und superkritischen Fällen weitermachen beweisen wir hier ein Lemma, das im Folgenden wichtig sein wird. Dazu betrachten wir die Taylorentwicklung von g um 1:

$$g(s) = 1 - m(1 - s) + r(s)(1 - s), \quad 0 \le s \le 1. \tag{1.9}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} r(s) &= m - \frac{1 - g(s)}{1 - s}, \\ r(0) &= m - (1 - p_0) \ge 0, \\ r(q) &= m - 1, \text{ wenn } q < 1, \\ r(1-) &= 0, \end{aligned}$$

und

$$r'(s) \leq 0, \quad 0 \leq s < 1.$$

Damit ist r eine fallende Funktion von $[0,1)$ nach $[0,m]$.

Lemma 1.24. *Für alle $\delta \in (0,1)$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} r(1-\delta^k) < \infty \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k k \log k < \infty. \tag{1.10}$$

Die Bedingung auf der rechten Seite ist gleichbedeutend mit $\mathbf{E}_1[Z_1 \log Z_1] < \infty$.

Beweis. Für $s \in [0,1)$ gilt

$$\begin{aligned} r(s) &= m - \sum_{n=0}^{\infty} s^n \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k\right) \\ &= m - \sum_{n=0}^{\infty} s^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p_k\right) s^n = m - \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n, \end{aligned}$$

wobei

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k.$$

Man beachte auch, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = m$ ist. Wir schreiben $\alpha = -\log\delta$ (sodass $e^{-\alpha x} = \delta^x$) und fixieren ein $j \in \mathbb{N}$, $j > 1$. Einerseits erhalten wir durch Abschätzung des Integrals durch die Untersumme

$$r(1-\delta) + \int_1^j r(1-e^{-\alpha x})\, dx \geq r(1-\delta) + \sum_{k=2}^{j} r(1-\delta^k) = \sum_{k=1}^{j} r(1-\delta^k).$$

Da die letzte Summe aber die Obersumme enthält, folgt andererseits auch

$$\sum_{k=1}^{j} r(1-\delta^k) \geq \int_1^j r(1-e^{-\alpha x})\, dx.$$

Nach Substitution $s = 1 - e^{-\alpha x}$ folgt

$$\int_1^j r(1-e^{-\alpha x})\, dx = \frac{1}{\alpha} \int_{1-\delta}^{1-\delta^j} \frac{r(s)}{1-s}\, ds.$$

Insgesamt ist also

$$r(1-\delta) + \frac{1}{\alpha} \int_{1-\delta}^{1-\delta^j} \frac{r(s)}{1-s}\, ds \geq \sum_{k=1}^{j} r(1-\delta^k) \geq \frac{1}{\alpha} \int_{1-\delta}^{1-\delta^j} \frac{r(s)}{1-s}.$$

Da diese Ungleichung für alle $j > 1$ und $\delta > 0$ gilt folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} r(1-\delta^k) < \infty \Longleftrightarrow \int_0^1 \frac{r(s)}{1-s}\, ds < \infty.$$

Als nächstes schauen wir uns an, wann die rechte Seite endlich ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{r(s)}{1-s} &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k (m - \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-s^n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\infty} (s^k - s^{k+n}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} s^k\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}0 \le \int_0^1 \frac{r(s)}{1-s}\, ds &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} s^k \, ds \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\log n + O(1)).\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist genau dann endlich, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \log n$ endlich ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \log n &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k>n} p_k \log n \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} p_k \sum_{n=1}^{k-1} \log n = \sum_{k=2}^{\infty} p_k \log\left((k-1)!\right) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} p_k \left[(k-1)\log(k-1) + o(k \log k)\right].\end{aligned}$$

Wobei man die letzte Gleichung mit der Stirling-Formel ($n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$) bekommt. Insgesamt erhalten wir, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \log n$ genau dann endlich ist, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} p_k k \log k$ endlich ist. □

1.6 Subkritische Verzweigungsprozesse

In diesem Abschnitt betrachten wir den subkritischen Fall $m < 1$. Wenn wir die Taylorentwicklung von g um 1 (siehe (1.9)) auf $g_k(s)$ anwenden, dann erhalten wir

$$g_{k+1}(s) = g(g_k(s)) = 1 - m(1 - g_k(s)) + r(g_k(s))(1 - g_k(s)), \tag{1.11}$$

bzw.

$$\frac{1 - g_{k+1}(s)}{1 - g_k(s)} = m\left(1 - \frac{r(g_k(s))}{m}\right). \tag{1.12}$$

Teleskopprodukt dieser Gleichungen liefert

$$\frac{1-g_n(s)}{1-s} = m^n \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{r(g_k(s))}{m}\right). \tag{1.13}$$

Da $0 \leq r(s)/m < 1$ für $s \in [0,1]$ ist, gibt es zu jedem $s \in [0,1]$ ein $\phi(s) \geq 0$ mit

$$m^{-n} \frac{1-g_n(s)}{1-s} \downarrow \phi(s), \text{ für } n \to \infty. \tag{1.14}$$

Insbesondere ist

$$\mathbf{P}(Z_n > 0) = 1 - g_n(0) \sim m^n \phi(0), \tag{1.15}$$

wobei wir wie üblich $a_n \sim b_n$ schreiben, falls $a_n/b_n \to 1$ für $n \to \infty$.

Ein nützliches und leicht zu beweisendes Kriterium, das Konvergenz von Reihen und Produkten in Verbindung bringt ist das folgende Resultat (Übung!).

Lemma 1.25. *Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge mit $0 \leq a_n < 1$. Dann konvergiert $\prod_{n=1}^\infty (1-a_n)$ genau dann gegen eine positive Zahl, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert.*

Mit diesem Lemma gilt $\phi(0) > 0$ genau dann, wenn $\sum_{k=0}^\infty r(g_k(0)) < \infty$. Aus $1-g(s) \leq m(1-s)$ (was z.B. aus (1.9) folgt) erhalten wir induktiv

$$1 - g_k(s) \leq m^k(1-s)$$

für alle k. Aus der Konvexität von g folgt für $s \geq s_0$

$$\frac{1-g(s)}{1-s} \geq g'(s_0),$$

woraus wir induktiv

$$1 - g_k(s) \geq (g'(s_0))^k (1-s)$$

erhalten. Mit $s_0 = p_0$ (was zwangsläufig positiv im subkritischen Fall ist) und $a = g'(p_0)$ folgt

$$1 - m^k \leq g_k(0) = g_{k-1}(g(0)) = g_{k-1}(p_0) \leq 1 - a^{k-1}(1-p_0) \leq 1 - b^k, \tag{1.16}$$

wobei $b = a \wedge (1-p_0)$ ist. Nach Lemma 1.24 gilt also $\sum_{k=0}^\infty r(g_k(0)) < \infty$ genau dann, wenn $\sum_{k=1}^\infty p_k k \log k < \infty$ ist. Es gilt also der folgende Satz.

Satz 1.26. *Für einen subkritischen Verzweigungsprozess $(Z_n)_{n\geq 0}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} m^{-n} \mathbf{P}(Z_n > 0) = \begin{cases} 0 & : \textit{ wenn } \sum_{k=1}^\infty p_k k \log k = \infty, \\ \phi(0) > 0 & : \textit{ sonst.} \end{cases}$$

Nun beweisen wir noch den Satz von Yaglom, in dem die asymptotische Verteilung von Z_n bedingt auf Überleben bis zu dieser Zeit, betrachtet wird.

Satz 1.27. *Im subkritischen Fall (mit $p_0 < 1$) existiert*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n = k | Z_n > 0) = b_k, \tag{1.17}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1, \tag{1.18}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k b_k = \frac{1}{\phi(0)} < \infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} p_k k \log k < \infty. \tag{1.19}$$

Ferner gilt für die erzeugende Funktion $f(s) := \sum_{k=1}^{\infty} s^k b_k$ der Verteilung $(b_k : k \in \mathbb{N})$:

$$f(g(s)) = mf(s) + 1 - m.$$

Bemerkung 1.28. Es lohnt sich an dieser Stelle die Aussage des obigen Satzes mit denen von Satz 1.23 zu vergleichen. Im kritischen Fall hätten wir nämlich $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und die Summe in (1.18) wäre 0. Während im kritischen Fall die asymptotische Verteilung von Z_n bedingt auf $Z_n > 0$ auf ∞ konzentriert ist, ist sie im subkritischen Fall auf $\mathbb{N}$ konzentriert.

Beweis von Satz 1.27. Wir setzen $f_n(s) := \mathbf{E}[s^{Z_n} | Z_n > 0]$ und erhalten (vgl. die Rechnung in Beweis von Satz 1.23(iii))

$$\begin{aligned} f_n(s) &= \frac{g_n(s) - g_n(0)}{1 - g_n(0)} = 1 - \frac{1 - g_n(s)}{1 - g_n(0)} \\ &= 1 - (1 - s) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - r(g_k(s))/m}{1 - r(g_k(0))/m}. \end{aligned}$$

Da g_k nicht-fallend und r nicht-wachsend sind, konvergieren die Terme in dem Produkt von oben gegen 1 für $k \to \infty$. Es gibt also eine Funktion f mit $f_n \uparrow f$ für $n \to \infty$. Da f_n erzeugende Funktionen (von positiven ZV) sind gilt

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k s^k.$$

Insbesondere ist $f(0) = 0$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} f(g_k(0)) &= \lim_{n\to\infty} f_n(g_k(0)) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1 - g_n(g_k(0))}{1 - g_n(0)} \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1 - g_k(g_n(0))}{1 - g_n(0)} = 1 - m^k. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Die rechte Seite konvergiert für $k \to \infty$ gegen 1 und mit $g_k(0) \to 1$ erhalten wir $f(1-) = 1$, was (1.18) zeigt. Die Aussage (1.19) folgt mit (1.20) und Satz 1.26 aus

$$\sum_{k=1}^{\infty} k b_k = f'(1-) = \lim_{k\to\infty} \frac{1 - f(g_k(0))}{1 - g_k(0)} = \lim_{k\to\infty} m^k \frac{1}{1 - g_k(0)} = \frac{1}{\phi(0)}.$$

Schließlich folgt die letzte Aussage aus

$$\begin{aligned} f_n(g(s)) &= 1 - \frac{1 - g_{n+1}(s)}{1 - g_{n+1}(0)} \cdot \frac{1 - g(g_n(0))}{1 - g_n(0)} = 1 - (1 - f_{n+1}(s)) \cdot \frac{1 - g(g_n(0))}{1 - g_n(0)} \\ &\xrightarrow{n\to\infty} 1 - (1 - f(s))m. \end{aligned}$$

□

1.7 Superkritische Verzweigungsprozesse

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns hauptsächlich mit dem superkritischen Fall, $m > 1$. Einige Aussagen gelten aber für jedes $m \in (0, \infty)$. Wir werden hier einige Resultate aus der Martingaltheorie voraussetzen müssen. Wir verweisen an dieser Stelle auf z.B. Klenke (2013).

Es sei also $m \in (0, \infty)$ und $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein Verzweigungsprozess aus Definition 1.1. Mit Markoveigenschaft (und zeitlicher Homogenität) erhalten wir

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}[Z_{n+k} | Z_n = i_n, Z_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Z_1 = i_1, Z_0 = i_0] \\ &\qquad = \mathbf{E}[Z_{n+k} | Z_n = i_n] = i_n \mathbf{E}[Z_k | Z_1 = 1] = i_n m^k. \end{aligned}$$

Für $W_n := m^{-n} Z_n$ folgt

$$\mathbf{E}[W_{n+k} | W_0, \dots, W_n] = m^{-(n+k)} \mathbf{E}[Z_{n+k} | Z_n] = m^{-(n+k)} m^k Z_n = W_n, \quad \text{f.s.} \tag{1.21}$$

Es gilt also der folgende Satz.

Satz 1.29. *Es sei $m \in (0, \infty)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, \dots, Z_n)$ die natürliche Filtration von $(Z_n)_{n\geq 0}$. Dann ist $(W_n, \mathcal{F}_n; n = 0, 1, \dots)$ ein nicht-negatives Martingal und es gibt eine Zufallsvariable W mit*

$$W_n \xrightarrow{n\to\infty} W \quad \text{f.s.} \tag{1.22}$$

Beweis. Die Martingaleigenschaft wurde in (1.21) bereits gezeigt und (1.22) folgt mit bekannten Martingalkonvergenzsätzen. Man beachte, dass W_n ein nicht-negatives Supermartingal ist und siehe z.B. Korollar 11.5 in Klenke (2013). □

Nach dem obigen Satz ist es klar, dass $Z_n(\omega)$ sich asymptotisch wie $m^n W(\omega)$ verhält. Martingalkonvergenzsätze liefern aber nicht ausreichend Informationen über W. Nach dem Lemma von Fatou haben wir zwar

$$\mathbf{E}[W] = \mathbf{E}[\lim_{n\to\infty} W_n] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}[W_n] = \mathbf{E}[Z_0], \tag{1.23}$$

es schließt aber nicht aus, dass $\mathbf{E}[W] = 0$ und somit $W = 0$ f.s. gilt. Im kritischen und subkritischen Fall gilt für genügend große n $Z_n = 0$ f.s. und somit gilt in diesen Fällen auch $W = 0$ f.s. Wir betrachten also im Folgenden den superkritischen Fall $m > 1$ und interessieren uns für Bedingungen unter denen $\{W > 0\}$ positive Wahrscheinlichkeit hat. Das erste Resultat geht von endlichen zweiten Momenten aus und ist relativ einfach.

Satz 1.30. *Ist $m > 1$, $\sigma^2 < \infty$ und $Z_0 = 1$, dann gilt*

(i) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[(W_n - W)^2\right] = 0$, *d.h.* $W_n \xrightarrow{n\to\infty} W$ *in* L^2;

(ii) $\mathbf{E}[W] = 1$, $\mathbf{Var}[W] = \dfrac{\sigma^2}{m^2 - m}$;

(iii) $\mathbf{P}(W = 0) = q = \mathbf{P}(Z_n = 0$ *für ein* $n)$.

Beweis. Aus (1.5) und (1.4) erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[W_n^2] &= \frac{1}{m^{2n}}\mathbf{E}[Z_n^2] = \frac{1}{m^{2n}}(\mathbf{Var}[Z_n] + \mathbf{E}^2[Z_n]) = \frac{1}{m^{2n}}\left(\frac{\sigma^2 m^{n-1}(m^n-1)}{m-1} + m^{2n}\right)\\ &= \frac{\sigma^2(1-m^{-n})}{m^2-m} + 1.\end{aligned}$$

Es folgt $\sup_n \mathbf{E}[W_n^2] = \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}[W_n^2] = \sigma^2/(m^2 - m) + 1 < \infty$. Die Aussagen (i) und (ii) folgen also mit L^2-Konvergenzsatz (siehe z.B. Korollar 11.11 in Klenke (2013)).

Sei nun $r = \mathbf{P}(W = 0)$. Aus $\mathbf{E}[W] = 1$ folgt $r < 1$. Ferner gilt

$$r = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(W = 0|Z_1 = k)\mathbf{P}(Z_1 = k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\mathbf{P}(W = 0))^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k r^k = g(r).$$

Da die Gleichung $g(s) = s$ eine eindeutige Lösung in $(0, 1)$ hat muss $r = q$ gelten. □

Der folgende Satz von Seneta und Heyde besagt, dass man einen superkritischen Verzweigungsprozess stets so reskalieren kann, dass der reskalierte Prozess fast sicher gegen eine nicht-triviale Zufallsvariable konvergiert.

Satz 1.31. *Es sei $1 < m < \infty$ und $Z_0 = 1$. Dann gibt es eine Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von positiven Zahlen so, dass $C_{n+1}/C_n \to m$ für $n \to \infty$ und die Folge $(\widetilde{W}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch $\widetilde{W}_n := Z_n/C_n$ konvergiert fast sicher gegen eine Zufallsvariable $\widetilde{W}$, die fast sicher endlich und nicht-negativ ist. Diese Zufallsvariable $\widetilde{W}$ besitzt eine Atom in 0 mit $\mathbf{P}(\widetilde{W} = 0) = q$. Außerdem gilt bedingt auf Überleben, also auf das Ereignis $\{Z_n \to \infty\}$*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Z_n}{r^n} = \begin{cases} 0 & : \text{ wenn } r > m,\\ \infty & : \text{ wenn } 0 < r < m,\end{cases} \quad \text{f.s.} \tag{1.24}$$

Beweis. Wir beweisen hier nur den ersten Teil des Satzes. Der Beweis von (1.24) ist eine Übungsaufgabe.

Sei $g_0(s) = s$ die Identität auf $[0, 1]$ und sei g_n^{-1} die Inverse von g_n, wobei wir g^{-1} für g_1^{-1} schreiben. Die Funktion g^{-1} ist wachsend, konkav und differenzierbar. Außerdem bildet sie das Intervall $[q, 1]$ bijektiv auf sich selbst ab.

Wegen $g(s) \le s$ für $q \le s \le 1$ gilt $g^{-1}(s) \ge s$ und daher gibt es ein g_∞^{-1} mit $g_n^{-1} \uparrow g_\infty^{-1}$. Ferner gilt

$$s = g_n(g_n^{-1}(s)) \le g_n(g_\infty^{-1}(s)) \to q$$

wenn $g_\infty^{-1}(s) < 1$. Also muss $g_\infty^{-1}(s) = 1$ für $s > q$ gelten.

Für $s \in [q, 1]$ setze $X_n(s) := \left(g_n^{-1}(s)\right)^{Z_n}$. Diese Folge ist ein nicht-negatives Martingal, denn es gilt f.s.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_{n+1}(s)|\mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}\left[\left(g_{n+1}^{-1}(s)\right)^{Z_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right] = \mathbf{E}\left[\left(g_{n+1}^{-1}(s)\right)^{Z_1}\right]^{Z_n} = g(g_{n+1}^{-1}(s))^{Z_n} \\ &= (g_n^{-1}(s))^{Z_n} = X_n(s).\end{aligned}$$

Es gibt also $X_\infty(s)$ mit $X_n(s) \to X_\infty(s)$ f.s. Wegen $0 \le X_n(s) \le 1$ können wir den Satz von dominierter Konvergenz benutzen und erhalten

$$\mathbf{E}[X_\infty(s)] = \mathbf{E}[X_0(s)] = s.$$

Die Folge $(X_n^2(s))$ ist ein $[0, 1]$-wertiger Submartingal. Für $s < 1$ gilt daher (hier ist nach unserer Annahme 1.4 Z_1 nicht-trivial in dem Sinne, dass $\mathbf{P}(Z_1 = 0) < 1$)

$$\mathbf{E}[X_\infty^2(s)] \ge \mathbf{E}[X_1^2(s)] > \mathbf{E}^2[X_1(s)].$$

Insgesamt ist $X_\infty(s)$ eine Zufallsvariable mit positiver Varianz.

Wir definieren $C_n(s) := (-\log g_n^{-1}(s))^{-1}$ und $\widetilde{W}(s) := -\log X_\infty(s)$ (der Wert unendlich ist zunächst mal nicht ausgeschlossen). Es gilt nun

$$\frac{1}{C_n(s)} Z_n = -\log(g_n^{-1}(s)) Z_n = -\log(X_n(s)) \to \widetilde{W}(s) \quad \text{f.s.}$$

Um zu zeigen, dass $\widetilde{W}(s)$ f.s. endlich ist betrachten wir die Taylorentwicklung von g. Wie wir im Abschnitt 1.5 gesehen haben ist

$$1 - g(s) = (m - r(s))(1 - s).$$

Ersetzen wir s durch $g_k^{-1}(s)$ für $q < s < 1$ dann gilt

$$\frac{1 - g_k^{-1}(s)}{1 - g_{k-1}^{-1}(s)} = \frac{1}{m(1 - r(g_k^{-1}(s))/m)}.$$

Produkt über $k = 1, \dots, n$ liefert

$$m^n(1 - g_n^{-1}(s)) = \frac{1 - s}{\prod_{k=1}^n (1 - r(g_k^{-1}(s))/m)}. \tag{1.25}$$

Wegen $-\log x \sim 1 - x$ für $x \uparrow 1$ und $g_n^{-1}(s) \uparrow 1$ für $n \to \infty$ und $s > q$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n(s)}{C_{n-1}(s)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - g_{n-1}^{-1}(s)}{1 - g_n^{-1}(s)} = m.$$

Nun können wir die f.s. Endlichkeit von $\widetilde{W}$ zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\widetilde{W}(s) < \infty) &= \mathbf{E}[\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} C_n^{-1}(s)Z_n < \infty | Z_1)] \\ &= \mathbf{E}\left[\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{C_{n-1}(s)}{C_n(s)} C_{n-1}^{-1}(s)Z_{n-1} < \infty\right)^{Z_1}\right] \\ &= g\left(\mathbf{P}(\widetilde{W}(s) < \infty)\right).\end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass

$$\mathbf{P}(\widetilde{W}(s) = 0) = g\left(\mathbf{P}(\widetilde{W}(s) = 0)\right).$$

Da die Wahrscheinlichkeit auf der linken Seite kleiner 1 ist, folgt $\mathbf{P}(\widetilde{W}(s) = 0) = q$. Schließlich ist

$$s = \mathbf{E}[X_\infty(s)] = \mathbf{E}[e^{-\widetilde{W}(s)}] \leq \mathbf{P}(\widetilde{W}(s) < \infty)$$

und somit ist $\mathbf{P}(\widetilde{W}(s) < \infty) = 1$ für $s > q$. Ansonsten hätten wir nach Lemma 1.14 $q < s \leq \mathbf{P}(\widetilde{W}(s) < \infty) = g_n(\mathbf{P}(\widetilde{W}(s) < \infty)) \to q$ für $n \to \infty$, was zu einem Widerspruch führt. □

Übung 1.32 ($\widetilde{W}$ ist bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig)**.** Es sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein superkritischer BGWP und für $i = 1, 2$ seien $(C_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ Folgen positiver Zahlen mit $Z_n/C_n^{(i)} \to \widetilde{W}_i$ f.s., wobei $\widetilde{W}_i$ nicht triviale Zufallsvariablen sind. Zeigen Sie, dass es ein $c > 0$ gibt mit $\widetilde{W}_0 = c\widetilde{W}_1$ f.s.

Das folgende Resultat von Kesten und Stigum benutzt wieder die bekannte $\mathbf{E}[Z_1 \log Z_1] < \infty$ Bedingung um die Reskalierungsfolge aus dem vorherigen Satz genauer anzugeben.

Satz 1.33. *Es sei* $1 < m < \infty$, $Z_0 = 1$ *und setzte* $W_n := m^{-n}Z_n$ *und* $W := \lim_{n\to\infty} W_n$. *Ist* $\mathbf{E}[Z_1 \log Z_1] < \infty$, *dann gilt* $W_n \to W$ *in* L^1 *und insbesondere* $\mathbf{E}[W] = 1$. *Ist* $\mathbf{E}[Z_1 \log Z_1] = \infty$, *dann ist* $\mathbf{E}[W] = 0$ *(was wegen* $W \geq 0$ *f.s. zu* $\mathbf{P}(W = 0) = 1$ *äquivalent ist).*

Beweis. Für $q < s < 1$ gilt $g_n^{-1}(s) \uparrow 1$ und somit $C_n^{-1}(s) = -\log g_n^{-1}(s) \sim 1 - g_n^{-1}(s)$ für $n \to \infty$. Mit (1.25) folgt

$$\lim_{n\to\infty} C_n^{-1}(s)m^n < \infty \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty}(1 - r(g_k^{-1}(s))/m) > 0$$

und nach Lemma 1.25 gilt

$$\lim_{n\to\infty} C_n^{-1}(s)m^n < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} r(g_k^{-1}(s)) < \infty. \tag{1.26}$$

Wähle nun $q < s_0 < 1$ mit $m_0 := g'(s_0) > 1$. Für $s_0 \leq s < 1$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\hat{s} \in [s, 1]$ mit $(1 - g(s))/(1 - s) = g'(\hat{s})$ und wegen der Konvexität gilt $m_0 \leq g'(\hat{s}) \leq m$. Es folgt

$$m_0 \leq \frac{1 - g(s)}{1 - s} \leq m$$

und somit

$$m_0 \le \frac{1 - g_k(s)}{1 - g_{k-1}(s)} \le m.$$

Mit Teleskopprodukt erhalten wir wieder

$$m_0^n(1-s) \le 1 - g_n(s) \le m^n(1-s),$$

woraus wir durch Substitution von $g_n^{-1}(s)$ für s

$$1 - m_0^{-n}(1-s) \le g_n^{-1}(s) \le 1 - m^{-n}(1-s)$$

erhalten. Für genügend große $k \in \mathbb{N}$ gilt $m_0^{-k} \le 1 - s$ und somit folgt

$$1 - m_0^{-n-k} \le 1 - m_0^{-n}(1-s) \le g_n^{-1}(s) \le 1 - m^{-n}(1-s) \le 1 - m^{-n}.$$

Auf diese Ungleichung wenden wir die Funktion r an, die auf $(0,1]$ fallend ist und erhalten

$$r(1 - m_0^{-n-k}) \ge r(g_n^{-1}(s)) \ge r(1 - m^{-n}).$$

Wir summieren über n, nutzen (1.26) und Lemma 1.24 und bekommen

$$\mathbf{E}[Z_1 \log Z_1] < \infty \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} C_n^{-1}(s) m^n < \infty, \tag{1.27}$$

d.h. wir können $C_n = m^n$ als Reskalierungsfolge in Satz 1.31 nehmen. Ist $\mathbf{E}[Z_1 \log Z_1] = \infty$ so folgt $m^{-n} Z_n \to 0$ f.s.

Es bleibt zu zeigen, dass W_n gegen W in L^1 konvergiert, was wiederum aus gleichgradiger Integrierbarkeit von W_n folgt. Dafür reicht es zu zeigen, dass $\mathbf{E}[\sup_n W_n] < \infty$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(W > at) &\ge \mathbf{P}(W > at, \sup_n W_n > t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(W > at, W_n > t, W_k \le t \text{ für } 0 \le k < n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(W > at | Z_n > tm^n, W_k \le t \text{ für } 0 \le k < n) \mathbf{P}(W_n > t, W_k \le t \text{ für } 0 \le k < n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(W > at | Z_n > tm^n) \mathbf{P}(W_n > t, W_k \le t \text{ für } 0 \le k < n),
\end{aligned}$$

wobei wir hier die Markoveigenschaft benutzt haben. Seien $W^{(j)}$ u.i.v. Kopien von W. Auf dem Ereignis $\{Z_n > tm^n\}$ starten zur Zeit n mindestens (ganzzahliger Anteil von) tm^n u.i.v. Familien von Verzweigungsprozessen. Damit gilt

$$\mathbf{P}(W > at | Z_n > tm^n) \ge \mathbf{P}\left(\frac{1}{tm^n} \sum_{j=1}^{tm^n} W^{(j)} > a \right).$$

Nach dem Gesetz der großen Zahlen gibt es für jedes positive $a < \mathbf{E}[W]$ ein $b > 0$ mit

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{tm^n}\sum_{j=1}^{tm^n} W^{(j)} > a\right) > b$$

für alle n (die Wahrscheinlichkeit ist nämlich für alle n positiv und konvergiert gegen 1). Es folgt

$$\mathbf{P}(W > at) \geq b\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(W_n > t, W_k \leq t \text{ für } 0 \leq k < n) = b\mathbf{P}(\sup_n W_n > t).$$

für $t \geq 1$ (für $t < 1$ ist die Wahrscheinlichkeit auf der rechten Seite gleich 1). Da $\sup_n W_n$ nicht-negativ ist gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\sup_n W_n] &= \int_0^\infty \mathbf{P}(\sup_n W_n > t)\,dt \\ &\leq 1 + \frac{1}{b}\int_0^\infty \mathbf{P}(W > at)\,dt = 1 + \frac{1}{ab}\int_0^\infty \mathbf{P}(W > t)\,dt \\ &= 1 + \frac{1}{ab}\mathbf{E}[W] < \infty.\end{aligned}$$

□

Bedeutung der $\mathrm{E}[Z_1 \log Z_1] < \infty$ Bedingung Bedingt auf Überleben des BGWP $(Z_n)_{n\geq 0}$, d.h. auf das Ereignis $\{Z_n \to \infty\}$ gilt nach den Sätzen von Seneta und Heyde, Satz 1.31, und von Kesten und Stigum, Satz 1.33:

(i) Im Fall $\mathbf{E}[Z_1 \log Z_1] < \infty$ wächst Z_n mit der Rate m^n.

(ii) Im Fall $\mathbf{E}[Z_1 \log Z_1] = \infty$ wächst Z_n mit Rate $C_n(s)$ aus Satz 1.31 und dies ist langsamer als m^n, denn nach (1.27) ist $\lim_{n\to\infty} C_n^{-1}(s)m^n = \infty$.

Für jede Nachkommensverteilung $(p_k)_{k\geq 0}$ gilt natürlich $p_k \to 0$ für $k \to \infty$. In Fall (ii) konvergiert p_k aber langsamer gegen 0 als in (i). Das bedeutet, dass in (ii) mit höherer Wahrscheinlichkeit mehr Nachkommen erzeugt werden als in (i). Wie es dennoch zum langsameren Wachstum kommt wird durch das folgende Lemma klarer, dessen Beweis eine Übung ist.

Wir betrachten zwei BGWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ und $(\widehat{Z}_n)_{n\geq 0}$ mit $Z_0 = \widehat{Z}_0 = 1$, Nachkommensverteilungen $(p_j)_{j\geq 0}$ bzw. $(\hat{p}_j)_{j\geq 0}$, zugehörigen Erwartungswerten $m, \hat{m} \in (0,\infty)$, Varianzen $\sigma^2, \hat{\sigma}^2 \in (0,\infty]$, erzeugenden Funktionen g und $\hat{g}$ und Aussterbewahrscheinlichkeiten q und $\hat{q}$.

Lemma 1.34. *Ist $m = \hat{m}$ und gilt*

$$\mathbf{P}(Z_1 \geq k) \leq \mathbf{P}(\widehat{Z}_1 \geq k) \quad \textit{für alle } k \geq 2 \tag{1.28}$$

mit strikter Ungleichung für mindestens ein k, dann gilt

$$g(s) < \hat{g}(s), \ s \in [0,1). \tag{1.29}$$

Insbesondere gilt

(i) $p_0 < \hat{p}_0$,

(ii) $q < \hat{q}$, *falls* $m > 1$,

(iii) $p_1 > \hat{p}_1$ *und* $\sigma^2 \leq \hat{\sigma}^2$ *mit* $\sigma^2 < \hat{\sigma}^2$, *falls* $\sigma^2 < \infty$.

Beweis. Übung! □

1.8 Beispiel: Die gebrochen-rationale Nachkommensverteilung

Wir betrachten hier ein Beispiel, bei dem man die erzeugende Funktion von Z_n direkt berechnen kann (was typischerweise kaum möglich ist).

Für $b, p \in (0,1)$ mit $b+p \leq 1$ sei $p_k = bp^{k-1}$ für $k = 1, 2, \ldots$ und $p_0 = 1-\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1-b/(1-p)$. Dann ist

$$g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = p_0 + bs \sum_{k=0}^{\infty} (ps)^k = 1 - \frac{b}{1-p} + \frac{bs}{1-ps} \tag{1.30}$$

und

$$m = g'(1-) = \frac{b}{(1-p)^2}.$$

Man beachte, dass die Potenzreihe von g den Konvergenzradius $1/p$ hat. Für u, v aus dem Konvergenzbereich folgt mit (1.30)

$$\frac{g(s) - g(u)}{g(s) - g(v)} = \frac{s-u}{s-v} \cdot \frac{1-pv}{1-pu}. \tag{1.31}$$

Die Gleichung $g(s) = s$ hat zwei Lösungen $\widehat{q}$ und 1, die auch zusammenfallen können. Wenn $m > 1$ ist, dann ist $\widehat{q} = q < 1$; ist $m = 1$, so ist $\widehat{q} = q = 1$; ist $m < 1$ so ist $\widehat{q} > 1 = q$. Nehmen wir nun $u = \widehat{q}$ und $v = 1$ in (1.31), dann folgt für $m \neq 1$

$$\frac{1-p}{1-p\widehat{q}} = \frac{g(s) - \widehat{q}}{s - \widehat{q}} \left(\frac{g(s) - 1}{s - 1} \right)^{-1}.$$

Hier hängt die linke Seite nicht von s ab und deswegen erhalten wir mit $s \uparrow 1$ auf der rechten Seite

$$\frac{1-p}{1-p\widehat{q}} = \frac{1}{m}.$$

Setzen wir das wieder in (1.31) ein, dann folgt

$$\frac{g(s) - \widehat{q}}{g(s) - 1} = \frac{1}{m} \cdot \frac{s - \widehat{q}}{s - 1}$$

und nach Iteration dieser Gleichung

$$\frac{g_n(s) - \widehat{q}}{g_n(s) - 1} = \frac{1}{m^n} \cdot \frac{s - \widehat{q}}{s - 1}.$$

Diese Gleichung kann man nun nach $g_n(s)$ auflösen und man erhält für $m \neq 1$

$$g_n(s) = 1 - \frac{m^n(1-\widehat{q})(s-1)}{m^n(s-1)-(s-\widehat{q})} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} \widehat{q} & : \text{ wenn } m > 1, \\ 1 & : \text{ wenn } m < 1. \end{cases}$$

Falls $m = 1$, dann ist $b = (1-p)^2$ und $\widehat{q} = 1$. Damit ist

$$g(s) = \frac{p-(2p-1)s}{1-ps}, \tag{1.32}$$

woraus man nach Iteration

$$g_n(s) = \frac{np-(np+p-1)s}{1-p+np-nps} \tag{1.33}$$

erhält, was für $n \to \infty$ gegen 1 konvergiert.

Dadurch, dass man g_n explizit kennt, kennt man einerseits natürlich die Verteilungen von Z_n, andererseits findet man leicht die Resultate vorheriger Abschnitte in diesem Spezialfall wieder. Ist beispielsweise $m = 1$, dann gilt (siehe (i) aus Satz 1.23)

$$n\mathbf{P}(Z_n > 0) = n(1-g_n(0)) = n\left(1 - \frac{np}{1-p+np}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1-p}{p} = \frac{2}{2p/(1-p)},$$

wobei $2p/(1-p) = \mathbf{Var}[Z_1] = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2$ ist (siehe Lemma 1.8).

Im Fall $m > 1$ wissen wir, dass wegen $g''(1) < \infty$ die Zufallsvariable W, gegen die Z_n/m^n fast sicher konvergiert, nicht-trivial ist und ein Atom in 0 hat mit $\mathbf{P}(W = 0) = q (= \widehat{q})$. In dem gebrochen-rationalen Fall können wir noch mehr sagen. Wir betrachten dazu die Laplace-Transformierte von W. Für $\lambda \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[e^{-\lambda W}] &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[e^{-\frac{\lambda}{m^n}Z_n}] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[(e^{-\frac{\lambda}{m^n}})^{Z_n}] = \lim_{n\to\infty} g_n(e^{-\frac{\lambda}{m^n}}) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{m^n(1-q)(e^{-\frac{\lambda}{m^n}}-1)}{m^n(e^{-\frac{\lambda}{m^n}}-1)-(e^{-\frac{\lambda}{m^n}}-q)}\right). \end{aligned}$$

Nun gilt $m^n(e^{-\frac{\lambda}{m^n}}-1) \to -\lambda$ für $n \to \infty$ und somit

$$\mathbf{E}[e^{-\lambda W}] = 1 - \frac{(1-q)\lambda}{\lambda+(1-q)}. \tag{1.34}$$

Andererseits wissen wir, dass es ein W^* gibt $W^* \in (0,\infty)$ f.s. und $W = 0 \cdot \mathbb{1}_{\{W=0\}} + W^* \cdot \mathbb{1}_{\{W>0\}}$. Damit ist

$$\mathbf{E}[e^{-\lambda W}] = \mathbf{P}(W=0) + (1-\mathbf{P}(W=0))\mathbf{E}[e^{-\lambda W^*}] = q + (1-q)\mathbf{E}[e^{-\lambda W^*}]. \tag{1.35}$$

Es folgt

$$E[e^{-\lambda W^*}] = \frac{1}{1-q}\left(1-q-\frac{(1-q)\lambda}{\lambda+(1-q)}\right) = 1 - \frac{(1-q)\lambda}{\lambda+(1-q)} = \frac{1-q}{\lambda+(1-q)}. \tag{1.36}$$

Dies ist (wie man leicht nachrechnet) die Laplace-Transformierte der Exp$(1-q)$-Verteilung. Also ist für eine unabhängige exponentiell mit Parameter $(1-q)$ verteilte Zufallsvariable W^*

$$W = \begin{cases} 0 & : \text{ mit Wahrscheinlichkeit } q, \\ W^* & : \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1-q. \end{cases} \tag{1.37}$$

2 Verwandte von Bienaymé-Galton-Watson-Prozessen

In diesem Kapitel schauen wir uns eine kleine Auswahl von Modifikationen von Bienaymé-Galton-Watson-Prozessen an. Mehr findet man z.B. in Kapitel 3 von Jagers (1975).

2.1 Gesamtpopulationsgröße

Es sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein BGWP mit $Z_0 = 1$, $m \in (0,\infty)$, $\sigma^2 \in (0,\infty]$. Außerdem nehmen wir wie üblich an, dass Annahme 1.4 erfüllt ist. Wir definieren den Gesamtpopulationsgrößenprozess $(Y_n)_{n\geq 0}$ durch

$$Y_n := \sum_{k=0}^{n} Z_k,\ \ n \geq 0, \tag{2.1}$$

Y_n ist also die Anzahl aller Individuen, die bis einschließlich Zeit n lebten. Natürlich gilt für $n \to \infty$

$$Y_n \uparrow Y_\infty := \sum_{k=0}^{\infty} Z_k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}. \tag{2.2}$$

Offensichtlich gilt

$$\mathbf{P}(Y_\infty < \infty) = q. \tag{2.3}$$

Außerdem kann man nachrechnen

$$\mathbf{E}[Y_n] = \begin{cases} \frac{1-m^{n+1}}{1-m} & : m \neq 1, \\ n+1 & : m = 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

und

$$\mathbf{Var}[Y_n] = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{(1-m)^2}\left(\frac{1-m^{2n+1}}{1-m} - (2n+1)m^n\right) & : m \neq 1 \\ \frac{n(n+1)(2n+1)\sigma^2}{6} & : m = 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} h_{n+1}(s) &= \mathbf{E}[s^{Z_0+Z_1+\ldots+Z_{n+1}}] = s\mathbf{E}[s^{Z_1+\ldots+Z_{n+1}}] \\ &= s\mathbf{E}[\mathbf{E}[s^{Z_1+\ldots+Z_{n+1}}|Z_1]] = s\mathbf{E}[(h_n(s))^{Z_1}] = sg(h_n(s)), \end{aligned}$$

Die erzeugenden Funktion $h_n(s) := \mathbf{E}[s^{Y_n}]$ erfüllen also die folgende Rekursion

$$h_{n+1}(s) = sg(h_n(s)). \tag{2.6}$$

Für die erzeugende Funktion $h_\infty(s) := \mathbf{E}[s^{Y_\infty}]$ folgt

$$h_\infty(s) = sg(h_\infty(s)). \tag{2.7}$$

In den folgendem zwei Lemmas diskutieren wir zunächst die Eindeutigkeit und dann Existenz von Lösungen der Gleichung (2.7).

Lemma 2.1. *Die Gleichung* (2.7) *hat höchstens eine analytische Lösung auf* $[0, 1]$.

Beweis. Seien h_∞ und $\tilde{h}$ zwei analytische Lösungen von (2.7). Mit der Konvexität von g erhalten wir

$$|h_\infty(s) - \tilde{h}(s)| = s|g(h_\infty(s)) - g(\tilde{h}(s))| \le sm|h_\infty(s) - \tilde{h}(s)|.$$

Für $s \in [0, m^{-1})$ folgt damit $h_\infty(s) = \tilde{h}(s)$ und da die Funktionen analytisch sind folgt damit Gleichheit auf dem gesamten Einheitsintervall. □

Lemma 2.2. *Die Lösung von* (2.7) *ist gegeben durch*

$$h_\infty(s) = q\hat{h}^{-1}(s), \;\; s \in [0, 1), \tag{2.8}$$

wobei $\hat{h}(s) = sq/g(sq)$ *ist.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den einfacheren Fall $m \le 1$. In diesem Fall ist $q = 1$ und somit ist Y_∞ eine fast sicher $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable. Insbesondere ist $h_\infty : [0, 1] \to [0, 1]$ bijektiv. Wir ersetzen s durch $h_\infty^{-1}(s)$ in (2.7) und erhalten $s = h_\infty^{-1}(s)g(s)$ bzw. $h_\infty^{-1}(s) = s/g(s)$, was in diesem Fall der Behauptung entspricht.

Ist $m > 1$, so ist $q \in (0, 1)$ und in diesem Fall betrachten wir einen BGWP mit der erzeugenden Funktion $\tilde{g}(s) = g(qs)/q$. Man überzeugt sich leicht davon, dass es sich bei $\tilde{g}$ in der Tat um eine erzeugende Funktion handelt.

Wegen $\tilde{g}'(1) = g'(q) < 1$ ist dieser neue BGWP subkritisch. Sei $\tilde{h}_\infty$ die zugehörige erzeugende Funktion der Gesamtpopulation. Nach dem Argument für den Fall $m \le 1$ muss $\tilde{h}_\infty$ analytisch sein. Es gilt

$$\tilde{h}_\infty(s) = s\tilde{g}(\tilde{h}_\infty(s)) = s\frac{g(q\tilde{h}_\infty(s))}{q}$$

bzw.

$$q\tilde{h}_\infty(s) = sg(q\tilde{h}_\infty(s)). \tag{2.9}$$

Also ist $q\tilde{h}_\infty$ eine analytische Lösung von (2.7) und damit gilt $h_\infty = q\tilde{h}_\infty$. Wie wir oben gesehen haben ist $\tilde{h}_\infty$ die Inverse von

$$\frac{s}{\tilde{g}(s)} = \frac{sq}{g(sq)},$$

was die Behauptung für den Fall $m > 1$ beweist. □

Beispiel 2.3 (Binäres Verzweigen, kritisch oder subkritisch)**.** Es sei $p \in (0, 1/2]$ und sei die Nachkommensverteilung gegeben durch $p_0 = 1 - p$ und $p_2 = p$. Die Gleichung (2.7) ist dann

$$h_\infty(s) = s(1-p) + sp(h_\infty(s))^2$$

mit den Lösungen

$$h_\infty(s) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4s^2p(1-p)}}{2ps}.$$

Weil $h_\infty(s) \leq 1$ gelten muss und $2ps \leq 1$ ist, ist die gesuchte Lösung gegeben durch

$$\begin{aligned} h_\infty(s) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4s^2p(1-p)}}{2ps} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{k!} \Big(2p(1-p)\Big)^{k-1} (1-p)s^{2k-1}, \end{aligned}$$

mit $n!! = \prod_{i=0}^{\lceil n/2 \rceil - 1}(n - 2i) = n(n-2)(n-4)\cdots$.

Für folgendes Resultat erinnern wir an die Notation $p_{ij} = \mathbf{P}_i(Z_{n+1} = j)$, wobei $\mathbf{P}_i$ für die Verteilung des BGWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ steht, wenn $Z_0 = i$ ist. Wie zuvor schreiben wir $\mathbf{P}$ für $\mathbf{P}_1$.

Satz 2.4 (Dwass)**.** *Unter der Annahme* $\{Y_\infty < \infty\}$ *gilt*

$$\mathbf{P}_i(Y_\infty = j) = \frac{i}{j} p_{j,j-i}, \quad i \in \mathbb{N},\ j \geq i. \tag{2.10}$$

Insbesondere gilt

$$\mathbf{P}(Y_\infty = j) = \frac{1}{j} p_{j,j-1}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Für den Beweis benötigen die folgende Version des Ballot Theorems, den wir hier ohne Beweis angeben.

Satz 2.5. *Es seien* $X_1, X_2, \ldots$ *eine Folge* $\mathbb{N}_0$*-wertiger Zufallsvariablen und sei* $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$ *mit* $S_0 = 0$*. Ist* $\mathbf{E}[X_1] < 1$*, dann gilt*

$$\mathbf{P}(S_k < k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}) = 1 - \mathbf{E}[X_1]. \tag{2.12}$$

Beweis von Satz 2.4. Die erzeugende Funktion von Y_∞ bei Start mit $Z_0 = k$ ist gegeben durch

$$(h_\infty(s))^k = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}_k(Y_\infty = n)s^n. \tag{2.13}$$

Die Beweisidee ist, eine andere Reihenentwicklung für $(h_\infty(s))^k$ zu finden und dann einen Koeffizientenvergleich zu machen.

Für $s \in [0,1]$ seien $X_1(s), X_2(s), \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit

$$\mathbf{P}(X_1(s) = k) = \frac{p_k s^k}{g(s)},\ k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.14}$$

Ferner sei $S_k(s) = \sum_{j=1}^n X_j(s)$ mit $S_0(s) = 0$.

Nehmen wir zunächst $m \leq 1$ an. In diesem Fall gilt $Y_\infty < \infty$ fast sicher. Ferner gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_1(s)] &= \frac{1}{g(s)} \sum_{k=0}^{\infty} k p_k s^k \\ &= \frac{s}{g(s)} \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1} \\ &= \frac{s g'(s)}{g(s)} < 1,\ s \in [0,1),\end{aligned}$$

wobei die Ungleichung einer Konsequenz der Konvexität von g ist. Außerdem gilt $\mathbf{E}[X_1(1)] = m$.

Nach Ballot Theorem gilt

$$\mathbf{P}(S_n(s) < n,\ \text{für alle } n \in \mathbb{N}) = 1 - \frac{s g'(s)}{g(s)},$$

und nach dem Gesetz der großen Zahlen gilt

$$\frac{S_n(s)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{s g'(s)}{g(s)} < 1,\ s \in [0,1).$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt also $S_n(s) \geq n - k$ fast sicher nur für endlich viele n und somit folgt

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}(S_n(s) = n-k, S_{n+j}(s) < n-k+j \text{ für alle } j \in \mathbb{N}) \\ &= \mathbf{P}(S_j(s) < j \text{ für alle } j \in \mathbb{N}) \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}(S_n(s) = n-k).\end{aligned}$$

Man kann zeigen (Übung!), dass

$$\mathbf{P}(S_n(s) = j) = \mathbf{P}(S_n(1) = j) \frac{s^j}{(g(s))^n}$$

gilt, und wir erhalten

$$\begin{aligned}1 &= \mathbf{P}(S_j(s) < j \text{ für alle } j \in \mathbb{N}) \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}(S_n(1) = n-k) \frac{s^{n-k}}{(g(s))^n} \\ &= \left(1 - \frac{s g'(s)}{g(s)}\right) \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}(S_n(1) = n-k) \frac{s^{n-k}}{(g(s))^n}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Sei $u = h_\infty^{-1}(s) = \frac{s}{g(s)}$, dann gilt

$$\frac{sg'(s)}{g(s)} = \frac{h_\infty(u)g'(h_\infty(u))}{g(h_\infty(u))} = ug'(h_\infty(u)).$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit aus der Tatsache, dass h_∞ die Gleichung (2.7) löst.

Leiten wir $h_\infty(u)$ in der Gleichung (2.7) ab, so folgt

$$\begin{aligned} h'_\infty(u) &= g(h_\infty(u)) + ug'(h_\infty(u))h'_\infty(u) \\ &= g(s) + \frac{sg'(s)}{g(s)}h'_\infty(u), \end{aligned}$$

und nach elementaren Umformungen erhalten wir

$$1 - \frac{sg'(s)}{g(s)} = \frac{g(s)}{h'_\infty(u)} = \frac{g(h_\infty(u)}{h'_\infty(u)} = \frac{h_\infty(u)}{uh'_\infty(u)}.$$

Nun setzen wir $u = \frac{s}{g(s)}$ und $s = h_\infty(u)$ in (2.15) ein und erhalten

$$1 = \frac{h_\infty(u)}{uh'_\infty(u)} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}(S_n(1) = n-k)\frac{u^n}{(h_\infty(u))^k},$$

bzw.

$$h'_\infty(u)(h_\infty(u))^{k-1} = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}(S_n(1) = n-k)u^{n-1}.$$

Integration dieser Gleichung von 0 bis s unter Beachtung von $h_\infty(0) = 0$ liefert

$$(h_\infty(s))^k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k}{n}\mathbf{P}(S_n(1) = n-k)s^n.$$

Da $(h_\infty(s))^k$ die erzeugende Funktion von Y_∞ bei $Z_0 = k$ ist, folgt nun mit einem Koeffizientenvergleich

$$\mathbf{P}_k(Y_\infty = n) = \frac{k}{n}\mathbf{P}(S_n(1) = n-k) = \frac{k}{n}\mathbf{P}_k(Z_1 = n-k) = \frac{k}{n}p_{n,n-k},$$

was die Behauptung für den Fall $m \leq 1$ beweist.

Sei nun $m > 1$ und damit $q \in (0,1)$. Wie in Beweis von Lemma 2.2 setzen wir $\tilde{g}(s) = g(sq)/q$ und bezeichnen mit $\tilde{h}_\infty$ die Lösung von (2.9). Wir haben im Beweis von Lemma 2.2 gesehen, dass $h_\infty(s) = q\tilde{h}_\infty(s)$ ist. Seien $\tilde{p}_{j,k}$, $k \geq 0$ die Koeffizienten der Potenzreihe von $\tilde{g}^j$, d.h. $\tilde{g}^j(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{p}_{j,k}s^k$. Dann gilt

$$\tilde{g}^j(s) = \frac{g^j(sq)}{q^j} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}_j(Z_1 = k)q^{k-j}s^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_{jk}q^{k-j}s^k$$

und es folgt $\tilde{p}_{jk} = p_{jk}q^{k-j}$ für alle $j, k \in \mathbb{N}_0$. Für $\tilde{h}_\infty$ können wir den Fall $m \leq 1$ verwenden und somit gilt

$$(h_\infty(s))^k = q^k(\tilde{h}_\infty(s))^k = q^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k}{n}\tilde{p}_{n,n-k}s^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k}{n} p_{n,n-k}s^n,$$

was die Behauptung auch für den Fall $m > 1$ zeigt. □

Bei dem nächsten Satz betrachten wir nur den Fall $Z_0 = 1$. Eine Version davon für $Z_0 = k$, $k \in \mathbb{N}$ kann aber gezeigt werden.

Satz 2.6 (Pakes). *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) Im subkritischen Fall $m < 1$ mit $\sigma^2 < \infty$ gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - \frac{\sigma^2}{m(1-m)}\right| > \varepsilon \middle| Z_n > 0\right) = 0. \tag{2.16}$$

(b) Im kritischen Fall $m = 1$ mit $\sigma^2 < \infty$ gilt für alle $t \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{Y_n}{n^2} \leq t \middle| Z_n > 0\right) = F(t). \tag{2.17}$$

Dabei ist F eine Verteilung mit Laplace-Transformierter

$$\int_0^\infty e^{-yt}F(dy) = \frac{\sigma\sqrt{2t}e^{-\sigma\sqrt{2t}}}{1-\sigma\sqrt{2t}e^{-\sigma\sqrt{2t}}}, \quad t > 0. \tag{2.18}$$

(c) Sei $m > 1$ und seien C_n und $\widetilde{W}$ wie im Satz 1.31 und W wie im Satz 1.33. Dann gilt

$$\frac{Y_n}{C_n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{m\widetilde{W}}{m-1}, \quad \textit{und} \quad \frac{Y_n}{m^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{mW}{m-1}, \quad \textit{fast sicher.} \tag{2.19}$$

Beweis. (a) Wir setzen $\theta := \frac{\sigma^2}{m(1-m)}$ und zeigen, dass die auf $\{Z_n > 0\}$ bedingte Laplace-Transformierte von Y_n/n gegen die Laplace-Transformierte des Dirac-Maßes in $\frac{\sigma^2}{m(1-m)}$ konvergiert. Dazu genügt es (wegen $\exp(-uY_n/n) = \exp(-u)^{Y_n/n}$ und $\exp(-u) \in (0,1)$ für $u > 0$) zu zeigen

$$\mathbf{E}[s^{Y_n/n}|Z_n > 0] \xrightarrow{n\to\infty} s^\theta, \; s \in (0,1). \tag{2.20}$$

Mit $h_n^0(s) := \mathbf{E}[s^{Y_n}\mathbb{1}_{\{Z_n=0\}}]$ gilt

$$\mathbf{E}[s^{Y_n/n}|Z_n > 0] = \frac{h_n(s^{1/n}) - h_n^0(s^{1/n})}{1-g_n(0)}. \tag{2.21}$$

Für die Funktionenfolge $(h_n^0)_{n\geq 0}$ gilt (Übung!)

$$h_0^0 \equiv 0, \quad h_{n+1}^0(s) = sg(h_m^0(s)), \quad h_{n+1}^0 \geq h_n^0 \quad \text{und} \quad h_n^0 \uparrow h_\infty. \tag{2.22}$$

Insbesondere erfüllt die Folge $(h_n^0)_n$ dieselbe Rekursion (2.7) wie die Folge $(h_n)_n$ und beide konvergieren gegen h_∞ mit dem Unterschied, dass $h_n \downarrow h_\infty$ gilt. Letzteres ist wegen $h_{n+1}(s) = \mathbf{E}[s^{Z_0+\ldots+Z_n+Z_{n+1}}] \leq \mathbf{E}[s^{Z_0+\ldots+Z_{n+1}}] = h_n(s)$ klar. Es gilt also $h_n^0 \leq h_\infty \leq h_n$ für alle $n \geq 0$.

Mit $\gamma(s) := sg'(h_\infty(s))$, $\varphi_n := \gamma^{-n}(h_n - h_\infty)$ und $\psi_n := \gamma^{-n}(h_\infty - h_n^0)$ gilt

$$\frac{h_n(s) - h_n^0(s)}{1 - g_n(0)} = \frac{\gamma^n(s)(\varphi_n(s) + \psi_n(s))}{1 - g_n(0)}, \quad s \in [0,1], \ n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.23}$$

Nun schauen wir uns zunächst die Funktionen φ_n genauer an. Für $s \in (0,1]$ und $n \in \mathbb{N}_0$ folgt mit (2.6), (2.7) und $h_0(s) = s$

$$\begin{aligned}
\varphi_n(s) &= \frac{1}{\gamma^n(s)}(h_n(s) - h_\infty(s)) \\
&= \frac{s - h_\infty(s)}{\gamma^n(s)} \prod_{j=1}^n \frac{h_j(s) - h_\infty(s)}{h_{j-1}(s) - h_\infty(s)} \\
&= \frac{s - h_\infty(s)}{(g'(h_\infty(s)))^n} \prod_{j=1}^n \frac{g(h_{j-1}(s) - g(h_\infty(s))}{h_{j-1}(s) - h_\infty(s)}.
\end{aligned}$$

Nach n-maliger Anwendung des Mittelwertsatzes auf die einzelnen Faktoren im obigen Produkt folgt

$$\varphi_n(s) = (s - h_\infty(s)) \prod_{j=1}^n \frac{g'(\eta_j(s))}{g'(h_\infty(s))}, \tag{2.24}$$

für geeignete η_j mit $h_\infty \leq \eta_j \leq h_{j-1}$. Es gilt

$$0 \leq h_j(s) - h_\infty(s) = s(g(h_{j-1}(s)) - g(h_\infty(s))) \leq g(h_{j-1}(s)) - g(h_\infty(s)) \leq m(h_{j-1}(s) - h_\infty(s))$$

und somit

$$0 \leq h_j(s) - h_\infty(s) \leq \ldots \leq m^j.$$

Es folgt

$$0 \leq g'(\eta_j(s)) - g'(h_\infty(s)) \leq g'(h_{j-1}(s)) - g'(h_\infty(s)) \leq g''(1)m^{j-1}$$

und damit konvergiert die Reihe $\sum_{j=1}^\infty (g'(\eta_j(s)) - g'(h_\infty(s)))$ gleichmäßig auf $[0,1]$. Das Produkt in (2.24) konvergiert damit auch gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $(0,1]$. Insbesondere konvergiert φ_n auf $(0,1]$ monoton wachsend gegen eine Funktion φ_∞. Diese Konvergenz ist nach Satz von Dini auch kompakt gleichmäßig. Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(s^{1/n}) = \varphi_\infty(1) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(1) = 0. \tag{2.25}$$

Analog kann man zeigen, dass ψ_n monoton fallend und auf $(0,1]$ kompakt gleichmäßig gegen eine stetige Funktion ψ_∞ konvergiert. Damit gilt für $s \in (0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(s^{1/n}) = \psi_\infty(1) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(1) = \lim_{n\to\infty} \mu^{-n}(1 - g_n(0)) = \phi(0), \tag{2.26}$$

wobei $\phi(0)$ der Grenzwert nach Satz 1.26 existiert und ist positiv, da wegen $\sigma^2 \in (0,\infty)$ auch die $\mathbf{E}_1[Z_1 \log Z_1] < \infty$ Bedingung erfüllt ist.

Wir müssen noch $\gamma^n(s^{1/n})/(1 - g_n(0)$ betrachten. Mit $h'_\infty(1) = 1/(1-m)$ gilt

$$\frac{d}{ds} g'(h_\infty(s))\Big|_{s=1} = g''(h_\infty(1))h'_\infty(1) = \frac{g''(1)}{1-m} = \frac{\sigma^2 - m(1-m)}{1-m} = m(\theta - 1).$$

Für ein geeignetes $\rho(s)$ mit $\lim_{s\uparrow 1} \rho(s) = 0$ gilt

$$g'(h_\infty(s)) = m(1 - (\theta - 1 - \rho(s))(1-s)).$$

Mit $\lim_{n\to\infty} n(1 - s^{1/n}) = \log s$, folgt

$$\gamma^n(s^{1/n}) = sm^n(1 - (\theta - 1 - \rho(s^{1/n}))(1 - s^{1/n}))^n \approx sm^n e^{(\theta-1)\log s} = \mu^n s^\theta.$$

Also ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma^n(s^{1/n})}{1 - g_n(0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{m^n s^\theta}{1 - g_n(0)} = \frac{s^\theta}{\phi(0)}. \tag{2.27}$$

Nun können wir (2.25), (2.26) und (2.27) benutzen um den Grenzwert von (2.23) und erhalten (2.20), was den Beweis der Aussage (a) abschließt.

(b) Zu zeigen ist, dass die Laplace-Transformierte von Y_n/n^2 gegen die in (2.18) angegebene Laplace-Transformierte konvergiert:

$$\mathbf{E}[e^{-tY_n/n^2} | Z_n > 0] = \frac{h_n(e^{-t/n^2}) - h_n^0(e^{-t/n^2})}{1 - g_n(0)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\sigma\sqrt{2t}e^{-\sigma\sqrt{2t}}}{1 - \sigma\sqrt{2t}e^{-\sigma\sqrt{2t}}}, \ t > 0.$$

Vergleicht man den Ausdruck in der Mitte mit rechter Seite von (2.21), so sollte man zurecht erwarten, dass die Beweisideen im kritischen und subkritischen Fall sich ähneln sollten. Im kritischen Fall ist der Beweis aber aufwendiger und wir verweisen an der Stelle auf die Originalarbeit Pakes (1971).

(c) Wie in Beweis von Satz 1.31 bezeichnen wir mit g_n^{-1} die Inverse von g_n auf $[q,1]$ und für ein $s \in (q,1)$ setzen wir $C_n = 1/(1 - g_n^{-1}(s))$. Nach Satz 1.31 konvergiert $\widetilde{W}_n = Z_n/C_n$ f.s. gegen eine Zufallsvariable $\widetilde{W}$. Für diese Zufallsvariable ist der linke Aussage in (2.19) zu zeigen.

Im Beweis von Satz 1.33 haben wir bewiesen, dass

$$m_0 \le \frac{1 - g_k(s)}{1 - g_{k-1}(s)} \le m$$

für alle $m_0 \in (1, m)$ und alle $k \geq J(s, m_0)$ mit geeignetem $J(s, m_0) \in \mathbb{N}_0$. Mit Argumenten wie dort kann man zeigen

$$m_0^{n-j} \leq \frac{1 - g_j^{-1}(s)}{1 - g_n^{-1}(s)} = \frac{C_n}{C_j} \leq m^{n-j}.$$

Zu $\varepsilon \in (0, m-1)$ setzen wir $J = J(s, m - \varepsilon)$ und $\nu = \sup\{n : \widetilde{W}_n \geq (1+\varepsilon)\widetilde{W}\} \vee J$. Für $n \geq J$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{Y_n}{C_n} &= \frac{Y_\nu}{C_n} + \sum_{j=\nu+1}^{n} \frac{Z_j}{C_j} \cdot \frac{C_j}{C_n} \\
&\leq \frac{Y_\nu}{C_n} + (1+\varepsilon)\widetilde{W} \sum_{j=\nu+1}^{n} (m-\varepsilon)^{j-n} \\
&\leq \frac{Y_\nu}{C_n} + \frac{(1+\varepsilon)(m-\varepsilon)\widetilde{W}}{m-\varepsilon-1}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Y_n}{C_n} \leq \frac{m\widetilde{W}}{m-1} \quad \text{f.s.}$$

Wegen $C_n / C_{n-j} \to m^j$ für $n \to \infty$ gilt für alle $k \geq 0$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{Y_n}{C_n} \geq \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{Z_{n-j}}{C_{n-j}} \cdot \frac{C_{n-j}}{C_n} = \widetilde{W} \sum_{j=0}^{k} m^{-j} \quad \text{f.s.}$$

Mit $\sum_{j=0}^{\infty} m^{-j} = \frac{1}{1-1/m} = \frac{m}{m-1}$ folgt nun der erste Teil von (2.19). Der Zweite Teil folgt daraus. (Zur Übung kann man versuchen den obigen Beweis für den zweiten Teil von (2.19) zu modifizieren.)

□

2.2 Wachsende Anfangspopulation

Bis jetzt haben wir uns meistens Verzweigungsprozesse $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit $Z_0 = 1$ oder $Z_0 = k$ für ein festes $k \in \mathbb{N}$ angeschaut. In diesem Abschnitt betrachten wir Verzweigungsprozesse mit wachsender Anfangspopulation. Es sei r_k eine gegen ∞ aufsteigende Folge natürlicher Zahlen und $(Z_n(r_k))_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei BGWP mit $Z_0 = r_k$. Wir werden Grenzwertsätze für $(Z_n(r_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ beweisen, die auf Lamperti (1967) zurückgehen.

Satz 2.7 (Superkritischer Fall). *Gilt $m \in (1, \infty)$ und $\sigma^2 \in (0, \infty)$, dann gilt für alle $u \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{Z_n(r_n) - r_n m^n}{m^n \sigma \sqrt{r_n/(m^2 - m)}} \leq u \right) = \Phi(u), \tag{2.28}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Beweis. Sei (Z_n) BGWP mit $Z_0 = 1$ und für $j \in \mathbb{N}$ seien (Z_{nj}) unabhängige Kopien von (Z_n). Wir setzen (vgl. (1.5))

$$\sigma_n^2 = \mathbf{Var}[Z_n] = \frac{\sigma^2 m^{n-1}(m^n - 1)}{m - 1}.$$

Dann gilt ($\stackrel{d}{=}$ steht für Gleichheit in Verteilung)

$$\frac{Z_n(r_n) - r_n m^n}{\sigma_n \sqrt{r_n}} \stackrel{d}{=} \frac{1}{\sigma_n \sqrt{r_n}} \sum_{j=1}^{r_n} (Z_{nj} - m^n).$$

Nach dem Zentralen Grenzwertsatz von Lindeberg-Feller (siehe Satz 15.43 in Klenke (2013)) konvergiert die Folge auf der rechten Seite in Verteilung gegen eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, wenn die Lindeberg-Bedingung gilt. Diese lässt sich hier wie folgt formulieren: Für alle $\delta > 0$ gilt

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \mathbf{E}\Big[(Z_n - m^n)^2 \mathbb{1}_{\{(Z_n - m^n)^2 > \delta^2 \sigma_n^2 r_n\}}\Big] \xrightarrow{n \to \infty} 0. \tag{2.29}$$

Es bleibt also diese Bedingung nachzuweisen. Mit $W_n = Z_n / m^n$ und $W = \lim_{n \to \infty} W_n$

Es gilt

$$X_n := \frac{Z_n - m^n}{\sigma_n} = \frac{W_n - 1}{\sigma_n / m^n} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{W - 1}{\sigma / \sqrt{m^2 - m}} =: X,$$

in L^2 und fast sicher (vgl. Satz 1.29 und Satz 1.30). Damit gilt für alle $\delta > 0$

$$\mathbf{E}\Big[X_n^2 \mathbb{1}_{\{X_n^2 > \delta^2 r_n\}}\Big] \xrightarrow{n \to \infty} 0, \tag{2.30}$$

was gleichbedeutend mit (2.29) ist. Die Behauptung (2.28) folgt nun mit

$$\frac{m^{2n} \sigma^2 r_n / (m^2 - m)}{\sigma_n^2 r_n} = \frac{m^{2n}(m - 1)}{(m^2 - m) m^{n-1} (m^n - 1)} \xrightarrow{n \to \infty} 1.$$

□

Bevor wir die Resultate für den superkritischen und den kritischen Fall beweisen erinnern wir an einige (möglicherweise unbekannte Begriffe).

- Sei T eine Poisson verteilte Zufallsvariable mit Parameter λ und seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige (auch von T) identisch verteilte $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariablen mit erzeugender Funktion f. Ferner Sei

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{mit} \quad S_0 = 0.$$

Die Zufallsvariable S_T hat dann die erzeugende Funktion (vgl. Lemma 1.9)

$$\mathbf{E}[s^{S_T}] = \sum_{n=0}^{\infty} (f(s))^n \mathbf{P}(T = n) = e^{\lambda(f(s)-1)}.$$

Die Verteilung von S_T (auch für allgemeine reellwertige Zufallsvariablen X_k) heißt *compound Poisson-*, *zusammengesetzte Poisson-* oder *bewertete Poisson-Verteilung*. In dem speziellen Fall diskreter Zufallsvariablen X_k spricht man auch von einer *diskret zusammengesetzter Poisson-Verteilung.*

- Sei T wie oben und seien $Y_0, Y_1, \dots$ von T unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungen Q_n. Dann hat Y_T die Verteilung

$$\mathbf{P}(Y_T \in \cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(Y_n \in \cdot | T = n)\mathbf{P}(T = n) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\cdot) e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Diese Verteilung heißt *Poisson-Mischung der Verteilungsfamilie Q_n*. Zusammengesetzte Poisson-Verteilungen sind natürlich spezielle Beispiele von Poisson-Mischungen.

Übung 2.8. Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig identisch verteilt mit $X_i \sim \text{Exp}(\beta) = \Gamma(1, \beta)$ für ein $\beta > 0$. Ferner T sei Poisson verteilt mit Parameter λ unabhängig von Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir setzen $Y_n = S_n$.

(a) Welche Verteilungen haben $Y_0, Y_1, \dots$?

(b) Zeigen Sie: Die Laplace-Transformierte von Y_T ist gegeben durch

$$\mathbf{E}[e^{-uY_T}] = e^{-\lambda u/(\beta+u)}. \tag{2.31}$$

Für das folgende Resultat müssen wir an frühere Notation erinnern in dem Fall $m \in (0, 1)$ erinnern. Wie in Satz 1.27 seien im Fall $b_k = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n = k | Z_n > 0)$, $k \in \mathbb{N}$ und sei f die zugehörige erzeugende Funktion. Ferner sei $c := \lim_{n\to\infty} m^{-n}\mathbf{P}(Z_n > 0)$, was nach Satz 1.26 positiv ist, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} p_k k \log k < \infty$ gilt.

Satz 2.9 (Subkritischer Fall). *Es sei $m \in (0, 1)$.*

(i) Gilt $\sum_{k=1}^{\infty} p_k k \log k < \infty$ und ist $r_n \sim am^{-n}$ für ein $a > 0$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[s^{Z_n(r_n)}] = \exp\Big\{ac(f(s) - 1)\Big\}. \tag{2.32}$$

(ii) Gilt $r_n m^n \to \infty$ und $\sigma^2 < \infty$, dann gilt für alle $u \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{Z_n(r_n) - r_n m^n}{m^n \sigma \sqrt{r_n/(m - m^2)}} \le u\right) = \Phi(u), \tag{2.33}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Bis auf triviale Grenzwerte sowie andere Normierungskonstanten sind die beiden obigen Verteilungen eindeutig.

Die Aussage (i) im obigen Satz besagt, dass $Z_n(r_n)$ asymptotisch diskret zusammengesetzt Poisson-verteilt. Grob kann man das so umformulieren: Es überleben im Schnitt Poisson mit Parameter ac viele der ursprünglichen r_n Familien. Jede der überlebenden Familien ist gemäß der Verteilung $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ verteilt.

Beweis von Satz 2.9. Wir beweisen nur die Aussage (i). Beweis von (ii), sowie die im letzten Satz angesprochen Eindeutigkeit sind Übungsaufgaben.

Seien Z_n und Z_{nj} wie im Beweis von Satz 2.7. Wir setzten $Y_{nj} = \mathbb{1}_{\{Z_{nj}>0\}}$. Dann ist Y_{nj} Bernoulli verteilt und nach Satz 1.26 gilt

$$r_n\mathbf{P}(Y_{nj} = 1) \sim am^{-n}\mathbf{P}(Z_n > 0) \xrightarrow{n\to\infty} ac.$$

Mit dem Poisson-Konvergenzsatz folgt

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{j=1}^{r_n} Y_{nj} = k\Big) \xrightarrow{n\to\infty} e^{-ac}\frac{(ac)^k}{k!}.$$

Mit $f_n(s) = \mathbf{E}[s^{Z_n}|Z_n > 0]$ (im Beweis von Satz 1.27 haben wir $f_n \uparrow f$ gezeigt) gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[s^{Z_n(r_n)}] &= \sum_{k=0}^{r_n}\mathbf{E}\Big[\prod_{j=1}^{r_n} s^{Z_{nj}}\Big|\sum_{j=1}^{r_n} Y_{nj} = k\Big]\mathbf{P}\Big(\sum_{j=1}^{r_n} Y_{nj} = k\Big)\\ &= \sum_{k=0}^{r_n}(f_n(s))^k\mathbf{P}\Big(\sum_{j=1}^{r_n} Y_{nj} = k\Big) \xrightarrow{n\to\infty} e^{ac(f(s)-1)}.\end{aligned}$$

□

Satz 2.10 (Kritischer Fall)**.** *Es sei $m = 1$ und $\sigma^2 < \infty$.*

(i) Ist $r_n \sim an$ für ein $a > 0$, dann gilt für alle $u > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}[e^{-uZ_n(r_n)/n}] = \exp\Big\{-2au/(2 + u\sigma^2))\Big\}. \tag{2.34}$$

(ii) Gilt $r_n n \to \infty$, dann gilt für alle $u \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\Big(\frac{Z_n(r_n) - r_n}{\sigma\sqrt{nr_n}} \le u\Big) = \Phi(u), \tag{2.35}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Bis auf triviale Grenzwerte sowie andere Normierungskonstanten sind die beiden obigen Verteilungen eindeutig.

Die rechte Seite von (2.34) kann man zu

$$\exp\Big\{-\frac{\frac{2a}{\sigma^2}u}{\frac{2}{\sigma^2}+u}\Big\},$$

was gerade (2.31) mit $\lambda = \frac{2a}{\sigma^2}$ und $\beta = \frac{2}{\sigma^2}$ entspricht. Also handelt es sich um die Laplace-Transformierte einer Poisson-Mischung von Gamma-verteilten Zufallsvariablen ist bzw. um die zusammengesetzte Poisson-Verteilung von $\mathrm{Exp}(\frac{2}{\sigma^2})$ verteilten Zufallsvariablen (vgl. mit Satz 1.23(iii)).

Beweis von Satz 2.10. Wir geben wieder nur eine Beweisskizze von (i) an, was ähnlich zum subkritischen Fall ist. Wir verwenden dieselbe Notation. Nach Satz 1.23 gilt

$$r_n\mathbf{P}(Y_{nj}=1) \sim an\mathbf{P}(Z_n>0) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2a}{\sigma^2}.$$

Mit Poisson-Konvergenzsatz folgt

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{j=1}^{r_n} Y_{nj}=k\Big) \xrightarrow{n\to\infty} e^{-2a/\sigma^2}\frac{(2a/\sigma^2)^k}{k!}.$$

Für $u>0$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big[e^{-uZ_n(r_n)/n}\Big] &= \sum_{k=0}^{r_n}\mathbf{P}\Big(\sum_{j=1}^{r_n} Y_{nj}=k\Big)\Big(\mathbf{E}[e^{-uZ_n/n}|Z_n>0]\Big)^k\\ &\xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2a/\sigma^2}\frac{(2a/\sigma^2)^k}{k!}\Big(\frac{2}{\sigma^2u+2}\Big)^k = e^{-2au/(2+u\sigma^2)},\end{aligned}$$

wobei wir $\mathbf{E}[e^{-uZ_n/n}|Z_n>0] \to \frac{2}{\sigma^2u+2}$ im Beweis von Satz 1.23(iii) gesehen haben. □

2.3 BGWP mit Immigration

Bei einem Verzweigungsprozess mit Immigration wird wie zuvor die Generation zur Zeit $n+1$ aus den Nachkommen der Individuen der n-ten Generation gebildet, zusätzlich kommen (unabhängig viele) Individuen dazu, deren Anzahl gemäß einer vorgegebenen Verteilung verteilt ist.

Es sei die Familie $\{\xi_{nk} : n\in\mathbb{N}_0, k\in\mathbb{N}\}$ wie in Definition 1.1. Zusätzlich sei $\{\zeta_n : n\in\mathbb{N}_0\}$ eine Folge u.i.v. $\mathbb{N}_0$-wertiger Zufallsvariablen (auch unabhängig von den ξ's) mit erzeugender Funktion h. Ein *Bienaymé-Galton-Watson-Prozess mit Immigration (BGWPI)* ist eine Markovkette $Y := (Y_n)_{n\geq 0}$, die durch

$$Y_0 := \zeta_0 \quad \text{und} \quad Y_{n+1} := \sum_{k=1}^{Y_n}\xi_{nk}+\zeta_{n+1}, \quad n\in\mathbb{N}_0 \tag{2.36}$$

rekursiv definiert ist. Man könnte an dieser Stelle auch mit einer beliebigen ganzzahligen nichtnegativen Zufallsvariablen Y_0 starten. Die Notation wird dadurch aber ein wenig komplizierter.

Natürlich ist nur der Fall $\mathbf{P}(\zeta_0 = 0) < 1$ interessant, da andernfalls $Y_n = 0$ für alle n ist. Unter der Voraussetzung $\mathbf{P}(\zeta_0 = 0) < 1$ ist der Zustand 0 natürlich nicht mehr absorbierend.

Wir geben nun noch eine alternative Definition von $(Y_n)_{n\geq 0}$, die möglicherweise auf den ersten Blick weniger intuitiv ist als (2.36) ist. Sie ist jedoch etwas besser geeignet zur Analyse der erzeugenden Funktionen von Y_n.

Sei $(Z_n(j))_{n\geq 0}, j \in \mathbb{N}_0$ eine Folge unabhängiger BGWP mit derselben Nachkommensverteilung $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, g die erzeugende Funktion der Nachkommensverteilung und g_n wie vorher die (n-fachen) Iterationen von g. Die Anfangspopulationen $Z_0(0), Z_0(1), Z_0(2), \ldots$ seien unabhängig und identisch verteilt mit (derselben) Verteilung $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ auf $\mathbb{N}_0$ mit $a_0 < 1$. Nun können wir $Y := (Y_n)_{n\geq 0}$ wie folgt alternativ definieren

$$Y_{n+1} := \sum_{j=1}^{n} Z_{n-j}(j), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.37}$$

Man sieht leicht, dass die beiden Definitionen von Y äquivalent sind. Hier ist $Z_{n-j}(j)$ die Anzahl der Nachkommen der zum Zeitpunkt j Immigrierten nach $n-j$ Generationen. Je nachdem ob $m = g'(1-) = 1, (< 1, > 1)$ ist, nennen wir BGWPI Y *kritisch, (subkritisch, superkritisch).*

Wir setzen $\mathcal{F}_n := \sigma(Z_k(j) : 0 \leq j + k \leq n)$. Mit

$$Y'_n := \sum_{j=0}^{n-1} Z_{n-j}(j)$$

gilt

$$Y_n = Y'_n + Z_0(n),$$

wobei nach Voraussetzung $Z_0(n)$ unabhängig von Y'_n und von $\mathcal{F}_{n-1}$ ist. Damit gilt f.s.

$$\mathbf{P}(Y'_n = j, Z_0(n) = k|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbf{P}(Y'_n = j|\mathcal{F}_{n-1})\mathbf{P}(Z_0(n) = k).$$

Außerdem gilt

$$\mathbf{P}(Y'_n = j|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbf{P}(Y'_n = j|Y_{n-1}) = (p^{*i})_j \quad \text{f.s. auf } \{Y_{n-1} = i\},$$

wobei p^{*i} die i-fache Faltung der Verteilung $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ bezeichnet. Damit können wir die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markovkette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ berechnen:

$$\begin{aligned}
p_{ij} = \mathbf{P}(Y_n = j|Y_{n-1} = i) &= \sum_{k=0}^{j} \mathbf{P}(Y'_n = j-k, Z_0(n) = k|Y_{n-1} = i) \\
&= \sum_{k=0}^{j} \mathbf{P}(Y'_n = j-k|Y_{n-1} = i)\mathbf{P}(Z_0(n) = k) \\
&= \sum_{k=0}^{j} (p^{*i})_{j-k} a_k.
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir die erzeugenden Funktionen von BGWPI. Sei dazu

$$h_n(s) = \mathbf{E}[s^{Y_n}], \quad h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k \quad \text{und} \quad g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k,$$

h_n ist also die erzeugende Funktion von Y_n, h die erzeugende Funktion der Immigrationsverteilung und g die erzeugende Funktion der Nachkommensverteilung. Wie üblich bezeichnen wir mit g_k die k-te Iteration von g.

Es gilt

$$\mathbf{E}[s^{Y_n}|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbf{E}[s^{Y'_n}|Y_{n-1}]\mathbf{E}[s^{Z_0(n)}] = (g(s))^{Y_{n-1}}h(s) \quad \text{f.s.}$$

und wir erhalten für h_n die folgende Rekursionsformel

$$h_n(s) = h(s)h_{n-1}(g(s)). \tag{2.38}$$

Mit (2.37) gilt

$$\begin{aligned} h_n(s) &= \prod_{j=0}^{n} \mathbf{E}[s^{Z_{n-j}(j)}] = \prod_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}[s^{Z_{n-j}}|Z_0(j) = k]a_k \\ &= \prod_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} (g_{n-j}(s))^k a_k = \prod_{j=0}^{n} h(g_{n-j}(s)) = \prod_{j=0}^{n} h(g_j(s)). \end{aligned}$$

Also gilt $h_n \downarrow h_\infty$ für $n \to \infty$, wobei die Funktion h_∞ die Gleichung

$$h_\infty = h \cdot h_\infty \circ g \tag{2.39}$$

löst. Die Funktion h_∞ ist eine erzeugende Funktion, wobei nicht ausgeschlossen ist, dass die zugehörigen Zufallsvariable, sagen wir Y_∞, mit positiver Wahrscheinlichkeit den Wert ∞ annimmt. Das kann dann ausgeschlossen werden, wenn $h_\infty(1-) = 1$ ist, dann ist $\mathbf{P}(Y_\infty \in \mathbb{N}_0) = 1$.

Da der Prozess Y nicht mehr in 0 absorbiert wird, liegt es nahe sich zu fragen ob und unter welchen Bedingungen es gegen nicht-triviale Zufallsvariablen konvergiert. Man muss also h_∞ untersuchen.

Satz 2.11. *Es sei Y ein subkritischer BGWI. Dann konvergiert Y_n in Verteilung gegen eine Zufallsvariable Y_∞ (die möglicherweise mit positiver Wahrscheinlichkeit den Wert ∞ annimmt) deren erzeugende Funktion h_∞ eine Lösung der Gleichung* (2.39) *ist. Ferner gilt*

$$h_\infty(1-) = 1 \iff \sum_{k=2}^{\infty} a_k \log k < \infty, \tag{2.40}$$

in diesem Fall gilt $Y_\infty < \infty$ f.s. Außerdem ist in diesem Fall h_∞ ist die einzige Lösung von (2.39) *$h_\infty(1-) = 1$.*

Für den Beweis brauchen wir eine Aussage, die mit "ähnlichen Mitteln" wie Lemma 1.24 bewiesen werden kann.

Übung 2.12. Sei $(q_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ und sei f die zugehörige erzeugende Funktion. Dann gilt

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k \log k < \infty \iff \sum_{n=0}^{\infty}(1 - f(1-\delta^n)) < \infty,\ \forall \delta \in (0,1). \tag{2.41}$$

Beweis von Satz 2.11. Wir haben schon gesehen, dass $h_n \downarrow h_\infty$ gilt. Bleibt noch (2.40) zu zeigen und dass h_∞ in diesem Fall die einzige Lösung ist.

Mit Lemma 1.25 ist es leicht zu sehen, dass

$$h_\infty = \prod_{j=0}^{\infty} h \circ g_j$$

genau dann auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergiert, wenn

$$\sum_{j=0}^{\infty}(1 - h(g_j(0))) < \infty$$

gilt. Nach (1.16) gilt

$$1 - m^k \le g_k(0) \le 1 - b^k$$

für ein $b \in (0,1)$. Zusammen mit (2.41) zeigt das (2.40).

Seien nun ϕ und ψ zwei Lösungen von (2.40). Dann gilt

$$\begin{aligned}
|\phi - \psi| &= |h||\phi \circ g - \psi \circ g| \\
&\le |\phi \circ g - \psi \circ g| \\
&= |h||\phi \circ g_2 - \psi \circ g_2| \\
&\le |\phi \circ g_2 - \psi \circ g_2| \\
&= \ldots \le |\phi \circ g_n - \psi \circ g_n|.
\end{aligned}$$

Wegen $g_n(0) \uparrow 1$ konvergiert die rechte Seite gegen 0, sofern $\phi(1-) = \psi(1-)$ ist. □

Für einen Beweis des folgenden Satzes verweisen wir auf Theorem 3.1.2 in Jagers (1975).

Satz 2.13. *Ist $m = 1$, $\sigma^2 = g''(1-) < \infty$ und $0 < a := h'(1) < \infty$ dann konvergiert Y_n/n in Verteilung gegen eine gamma verteilte Zufallsvariable mit Dichte*

$$w(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0, \tag{2.42}$$

wobei $\alpha = 2a/\sigma^2$ und $\beta = \sigma^2/2$. Insbesondere ist im Falle $a = \sigma^2/2$

$$w(x) = \frac{1}{\sigma^2/2} e^{-\frac{x}{\sigma^2/2}}. \tag{2.43}$$

Bemerkung 2.14. In Satz 1.23(iii) haben wir bereits gesehen, dass Z_n/n bedingt auf $\{Z_n > 0\}$ gegen eine Zufallsvariable mit Dichte $w(x)$ aus (2.43) in Verteilung konvergiert. Zusammen mit obigem Satz folgt also daraus, dass das Bedingen auf $\{Z_n > 0\}$ und Immigration mit Mittelwert $\sigma^2/2$ denselben Effekt haben.

Für einen Beweis des folgenden Satzes verweisen wir auf Theorem 12.3 in Lyons (2014) bzw. etwas anders und umfangreicher auf Theorem 3.1.3 in Jagers (1975).

Satz 2.15. *Für $m \in (1, \infty)$ gilt*

(i) Ist $\sum_{k=2}^{\infty} a_k \log k < \infty$, dann konvergiert Y_n/m^n f.s. gegen einen f.s. endlichen Grenzwert.

(ii) Ist $\sum_{k=2}^{\infty} a_k \log k = \infty$, dann gilt $\limsup_{n\to\infty} Y_n/c^n = \infty$ f.s. für jedes $c > 0$.

3 Einige Anwendungen

Verzweigungsprozesse haben viele Anwendungen in verschiedenen Gebieten, wie z.B. Biologie und Physik. In diesem Kapitel stellen wir zwei dieser Anwendungen aus der Perkolationstheorie und der Theorie der zufälligen Graphen vor. Wir orientieren uns an Biskup (2007). Mehr, ausführlicher und auch mit anderen Methoden werden solche Anwendungen in van der Hofstad (2014) behandelt.

3.1 Kantenperkolation auf regulären Bäumen

Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge V von Ecken (engl. vertex) und einer Menge E von Kanten (engl. edge). Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn für jedes Paar von Ecken $v, w \in V$ es einen *Pfad* zwischen v und w gibt, d.h. es gibt eine Folge von Kanten $e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_2, v_3), \ldots, e_k = (v_k, v_{k+1})$ in E mit $v_1 = v$ und $v_{k+1} = w$. Eine *Schleife* ist ein selbstvermeindender Pfad mit demselben Start- und Endpunkt. Zwei Ecken $v, w \in V$ heißen *Nachbarn* oder *benachbart*, wenn $(v, w) \in E$ ist.

Ein *regulärer* (gerichteter) Baum $\mathbb{T}_b$ für eine ganze Zahl $b \geq 2$ ist ein zusammenhängender Graph ohne Schleifen bei dem bis auf eine Ecke, genannt *Wurzel* alle Ecken $b + 1$ Nachbarn haben. Die Wurzel hat b Nachbarn und wird mit $\emptyset$ bezeichnet. Für $v \neq \emptyset$ nennen wir den Nachbar, der auf dem eindeutigen (kürzesten) Pfad zu $\emptyset$ liegt als "Eltern(teil)" von v und die restlichen b Nachbarn als "Kinder" von v. Die Wurzel hat keine Eltern und b Kinder.

Definition 3.1 (Kantenperkolation auf einem Graph)**.** Für einen Graphen $G = (V, E)$ und $p \in [0, 1]$ sei $\omega = \{\omega_e : e \in E\}$ eine Familie unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit

$$\mathbf{P}(\omega_e = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\omega_e = 0).$$

Das *Kantenperkolationsmodell* auf G mit *Kantenwahrscheinlichkeit* p ist der zufällige (Sub-)Graph $G_\omega = (V, E_\omega)$ mit

$$E_\omega = \{e \in E : \omega_e = 1\}.$$

In einem Perkolationsmodell interessiert man sich typischerweise für Existenz (und Anzahl) von unendlich großen Zusammenhangskomponenten, und für Typische Größe von Zusammenhangskomponenten, wenn sie fast sicher endlich sind. Im Folgenden werden wir $\mathbf{P}_p$, $\mathbf{E}_p$ usw. schreiben um die Abhängigkeit der betreffenden Größen und Funktionen von dem Parameter p zu betonen. Wir setzten

$$\theta(p) = \mathbf{P}_p(|C_\omega(\emptyset)| = \infty) \tag{3.1}$$

$$\chi(p) = \mathbf{E}_p[|C_\omega(\emptyset)|] \tag{3.2}$$

$$\psi_p(s) = \mathbf{E}_p[s^{|C_\omega(\emptyset)|}], \ s \in [0, 1]. \tag{3.3}$$

In dem folgenden Satz fassen wir die wichtigsten Resultate zu Kantenperkolation auf $\mathbb{T}_b$.

Satz 3.2. *Betrachte auf $\mathbb{T}_b$ mit $b \geq 2$ Kantenperkolation mit Parameter p und setze $p_c = 1/b$.*

(i) Es gilt $\theta(p) = 0$ für $p \leq p_c$ und $\theta(p) > 0$ für $p > p_c$. Außerdem ist die Funktion $p \mapsto \theta(p)$ stetig auf $[0,1]$, streng wachsend auf $[p_c, 1]$ und es gilt

$$\theta(p) \sim \frac{2b^2}{b-1}(p - p_c), \quad p \downarrow p_c. \tag{3.4}$$

(ii) Für $p < p_c$ gilt

$$\chi(p) = \frac{p_c}{p_c - p} \tag{3.5}$$

und insbesondere gilt $\chi(p) \uparrow \infty$ für $p \uparrow p_c$.

(iii) Für $p = p_c$ gilt

$$\mathbf{P}_{p_c}(|C_\omega(\emptyset)| \geq n) = \mathcal{O}(n^{-1/2}). \tag{3.6}$$

Bevor wir diesen Satz beweisen diskutieren wir den Zusammenhang zwischen Verzweigungsprozessen und Kantenperkolation auf Bäumen.

Lemma 3.3. *Sei X_n die Anzahl der Ecken in $C_\omega(\emptyset)$, die Abstand n zur Wurzel haben. Dann ist $(X_n)_{n\geq 0}$ wie ein BGWP mit Nachkommensverteilung $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit*

$$p_k = \begin{cases} \binom{b}{k} p^k (1-p)^{b-k} & : \text{ wenn } 0 \leq k \leq b, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Beweis. Sei V_n die Menge der Ecken in $\mathbb{T}_b$ mit Abstand n zur Wurzel. Gegeben X_n, seien $v_1, \dots, v_{X_n}$ die Ecken in $E_\omega(\emptyset) \cap V_n$. Mit

$$\xi_{n+1,j} := \#\{u \in V_{n+1} : (v_j, u) \in E_\omega\}$$

gilt offensichtlich

$$X_{n+1} = \xi_{n+1,1} + \ldots + \xi_{n+1,X_n}.$$

Dies ist eine Summe unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen unabhängig von X_n. Die Zufallsvariablen ξ sind Binomial verteilt mit Parametern b und p, was die Behauptung beweist. □

Korollar 3.4. *(i) Die* Perkolationswahrscheinlichkeit *$\theta(p)$ ist die in $[0,1]$ maximale Lösung der Gleichung*

$$\theta = 1 - (1 - p\theta)^b. \tag{3.8}$$

(ii) Die erzeugende Funktion der Komponentengröße *$\psi_p(s)$ ist für $s \in (0,1)$ und $p \in (0,1)$ die eindeutige Lösung der Gleichung*

$$\psi = s(1 - p + p\psi)^b, \tag{3.9}$$

die in $(0,1)$ liegt.

Beweis. Die erzeugende Funktion der Binomialverteilung mit Parametern b und p ist gegeben durch

$$g(s) = \sum_{k=0}^{b} s^k \binom{b}{k} p^k (1-p)^{b-k} = (1-p+ps)^b.$$

Es gilt natürlich $\{|C_\omega(\emptyset)| = \infty\} = \{X_n > 0, \forall n\}$ und somit ist die Aussterbewahrscheinlichkeit $q = 1 - \theta(p)$ die kleinste Lösung von $g(s) = s$. Damit folgt (i) leicht.

Für (ii) seien $v_1, \ldots, v_{X_1}$ die Nachbarn von $\emptyset$ in $C_\omega(\emptyset)$. Dann gilt

$$C_\omega(\emptyset) = \{\emptyset\} \cup \widetilde{C}_\omega(v_1) \cup \ldots \cup \widetilde{C}_\omega(v_{X_1}),$$

wobei $\widetilde{C}_\omega(v)$ für $v \neq \emptyset$ die Zusammenhangskomponente von v in dem Unterbaum von $\mathbb{T}_b$ mit Wurzel in v bezeichnet. Die Vereinigung ist disjunkt und die $\widetilde{C}_\omega(v)$'s sind untereinander unabhängig und genauso verteilt wie $C_\omega(\emptyset)$. Es folgt

$$\psi_p(s) = s\mathbf{E}_p[s^{\widetilde{C}_\omega(v_1)} \cdots s^{\widetilde{C}_\omega(v_{X_1})}] = s \sum_{k=0}^{n} p_k (\psi_p(s))^k = s(1-p+p\psi_p(s))^b,$$

was (3.9) zeigt. Die Eindeutigkeit der Lösung für $s \in (0,1)$ folgt aus der Konvexität der Abbildung $\psi \mapsto F(\psi) = s(1-p+p\psi)^b$ und weil außerdem $F(0) > 0$ und $F(1) < 1$ gilt. □

Übung 3.5. Geben Sie $\theta(p)$ in den Fällen $b = 2$ und $b = 3$ explizit an.

Übung 3.6. Zeigen Sie, dass es $c, C \in (0,\infty)$ gibt mit $\mathbf{P}_p(|C_\omega(\emptyset)| \geq n) \leq Ce^{-cn}$ für alle n.

Lemma 3.7. *Für alle $s < 1$ gilt*

$$\frac{1-\psi_p(s)}{1-s} = \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} \mathbf{P}_p(|C_\omega(\emptyset)| \geq n) \tag{3.10}$$

Beweis. Mit $a_n = \mathbf{P}_p(|C_\omega(\emptyset)| \geq n)$ gilt

$$\begin{aligned}\psi_p(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{P}_p(|C_\omega(\emptyset)| = n) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (s^n - s^{n-1}) a_n = 1 + (s-1) \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} a_n.\end{aligned}$$

Elementare Umformungen liefern (3.10). □

Beweis von Satz 3.2. (i) Die Funktion ϕ, definiert durch $\phi(\theta) = 1 - (1-p\theta)^b$, ist konkav auf $[0,1]$ und es gilt

$$\phi(\theta) = pb\theta - \binom{b}{2} p^2 \theta^2 + o(\theta^2). \tag{3.11}$$

Die Fixupnktgleichung $\theta = \phi(\theta)$ hat dann für $pb \le 1$ nur die Lösung $\theta = 0$ in $[0,1]$. In dem Fall $pb > 1$ gibt es die zwei Lösungen $\theta = 0$ und $\theta = \theta(p) > 0$. Dass es die zweite Lösung gibt, folgt aus $\phi(1) < 1$.

Um (3.4) zu zeigen, erinnern wir an $b = 1/p_c$ und schreiben (3.11) wie folgt um

$$\phi(\theta) = \theta + b\theta\Big((p - p_c) - \frac{b-1}{2}p^2(1 + o(1))\theta\Big). \tag{3.12}$$

Für die positive Lösung $\theta = \theta(p)$ von $\phi(\theta) = \theta$ sollte der Ausdruck in den Klammern verschwinden und es folgt

$$\theta(p) = \frac{2}{(b-1)p^2}(p - p_c)(1 + o(1)) = \frac{2b^2}{b-1}(p - p_c)(1 + o(1)) \quad p \downarrow p_c. \tag{3.13}$$

(ii) Für (3.5) müssen wir $\chi(p) = \psi_p'(1)$ berechnen. Wir setzen $f(x) = 1 - \psi_p(s)$. Dann lässt sich die Gleichung (3.9) wie folgt schreiben

$$f(s) = 1 - s(1 - pf(s))^b. \tag{3.14}$$

Ableiten an der Stelle $s = 1$ liefert

$$f'(1) = -1 + bpf'(1) \tag{3.15}$$

und es folgt $\psi_p'(1) = -f'(1) = 1/(1 - pb) = p_c/(p_c - p)$.

(iii) Wir zeigen (3.6) in dem Spezialfall $b = 2$. In diesem Fall kann man die Gleichung (3.14) nach $f(s)$ auflösen, und die auf $(0,1)$ positive Lösung ist gegeben durch

$$f(s) = \frac{2}{s}\Big(\sqrt{1-s} - (1-s)\Big). \tag{3.16}$$

Nach (3.10) gilt

$$s\frac{f(s)}{1-s} = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{P}_p(|C_\omega(\emptyset)| \ge n). \tag{3.17}$$

Wir müssen also die linke Seite in eine Taylorreihe um $s = 0$ entwickeln und dann einen Koeffiezientenvergleich machen. Es gilt

$$s\frac{f(s)}{1-s} = 2\Big(\frac{1}{\sqrt{1-s}} - 1\Big) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}\Big(\frac{x}{4}\Big)^n \tag{3.18}$$

und wir erhalten

$$\mathbf{P}_p(|C_\omega(\emptyset)| \ge n) = 2\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}. \tag{3.19}$$

Mit Stirling-Formel, $n! = (n/e)^n\sqrt{2\pi n}(1 + o(1))$, rechnet man leicht nach

$$2\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} = \frac{2 + o(1)}{\sqrt{\pi n}}, \quad \text{für } n \to \infty, \tag{3.20}$$

was die behauptete Asymptotik für $\mathbf{P}_p(|C_\omega(\emptyset)| \ge n)$ zeigt. □

3.2 Erdős-Rényi Graph

Sei K_n der vollständige Graph mit Knoten $\{1, \ldots, n\}$. Dabei nennen wir einen Graph *vollständig*, wenn alle Knotenpaare durch eine Kante verbunden sind. Für $p \in [0, 1]$ behalten wir eine Kante unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit p und löschen sie mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$. Den (Perkolations-) Graph, den wir auf diesen Weise bekommen bezeichnen wir mit $G(n, p)$. Wir schauen uns hier ein Resultat zur (asymptotischen) Verteilung einer Zusammenhangskomponente an. Natürlich ist viel mehr Interessantes bekannt; wir verweisen an dieser Stelle auf van der Hofstad (2014).

Im Folgenden betrachten wir für $\alpha \geq 0$ und $n \geq \alpha$ den Graph $G(n, \alpha/n)$ und bezeichnen mit $C(1)$ die Zusammenhangskomponente der "1" in diesem Graphen. Ferner setzen wir für $\varepsilon > 0$

$$\theta_{\varepsilon,n}(\alpha) := \mathbf{P}(|C(1)| \geq \varepsilon n). \tag{3.21}$$

Satz 3.8. *Der Grenzwert*

$$\theta(\alpha) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \to \infty} \theta_{\varepsilon,n}(\alpha) \tag{3.22}$$

existiert für alle $\alpha \geq 0$ und ist gegeben durch die maximale Lösung der Gleichung

$$\theta = 1 - e^{-\alpha\theta}. \tag{3.23}$$

Insbesondere gilt $\theta(\alpha) = 0$ für $\alpha \leq 1$ und $\theta(\alpha) > 0$ für $\alpha > 1$.

Die Gleichung (3.23) besitzt die triviale Lösung $\theta = 0$ und für $\alpha \leq 1$ ist es auch die maximale Lösung. Die letzte Aussage des Satzes kann man sich leicht überlegen. Außerdem sieht man leicht ein, dass $\theta(\alpha)$ die Überlebenswahrscheinlichkeit eines Verzweigungsprozesses mit Nackommensverteilung gegeben durch $\mathrm{Pois}(\alpha)$ ist.

Da K_n kein Baum ist, ist es weniger offensichtlich, dass man für den Beweis von Satz 3.8 eine Verbindung mit Verzweigungsprozessen ausnutzen kann. Eine Verbindung wird durch den folgenden Such- bzw. Erkundungsalgorithmus einer Zusammenhangskomponente hergestellt. In jedem Schritt des Algorithmus werden alle Ecken eines Graphen in drei Kategorien: *aktiv*, *neutral* und *inaktiv*. Zum Zeitpunkt 0 ist nur die Ecke 1 aktiv und alle anderen sind neutral. Zu jedem Zeitpunkt $k \geq 1$ führen wir folgende Schritte durch:

(i) Wähle unter den aktiven Knoten v den mit dem Kleinsten Index.

(ii) Finde alle neutralen Nachbarn von v in dem Graphen und setze deren Status auf "aktiv".

(iii) Setze den Status von v auf "inaktiv".

Dieser Algorithmus bricht ab wenn es keine aktiven Knoten mehr gibt. Zu diesem Zeitpunkt sind alle Ecken in der Zusammenhangskomponente $C(1)$ gefunden.

Sei A_k die Anzahl der aktiven Ecken beim k-ten Schritt des Algorithmus. Insbesondere ist $A_0 = 1$. Ist beim k-ten Schritt v die aktive Ecke mit dem kleinsten Index (die Ecke also die in

Schritt (i) gewählt wird), dann bezeichnen wir mit L_k die Anzahl der neutralen Nachbarn von v. Es gilt

$$A_{k+1} = A_k + L_k - 1 \tag{3.24}$$

und $n - k - A_k$ ist die Anzahl der neutralen Ecken nach dem k-ten Schritt. Damit folgt sofort das folgende Resultat.

Lemma 3.9. *Bedingt auf A_k ist $L_k \sim \mathrm{Bin}(n - k - A_k, \alpha/n)$.*

Wir bezeichnen wie zuvor mit $\mathbb{T}_b$ den regulären Baum und mit $C(\emptyset)$ die Zusammenhangskomponente der Wurzel $\emptyset$. Ferner schreiben wir $\mathbf{P}_{K_n}$ und $\mathbf{P}_{\mathbb{T}_b}$ für die Verteilungen in Perkolationsmodellen auf K_n bzw. $\mathbb{T}_b$. Die Kantenwahrscheinlichkeit ist in allen Fällen α/n.

Lemma 3.10. *Für $m \leq n$ und $r \leq n - m$ gilt*

$$\mathbf{P}_{\mathbb{T}_m}(|C(\emptyset)| \geq r) \leq \mathbf{P}_{K_n}(|C(1)| \geq r) \leq \mathbf{P}_{\mathbb{T}_n}(|C(\emptyset)| \geq r). \tag{3.25}$$

Beweis. Wir erkunden mit Hilfe des Suchalgorithmus gleichzeitig

Wenn $k + A_k \leq n - m$ ist, wenn also bis zum k-ten Schritt des Suchalgorithmus weniger als $n - m$ Ecken der Zusammenhangskomponenten gefunden wurden, dann gilt

□

3.3 Verzweigungsprozesse in zufälliger Umgebung

Wie der Name schon vermuten lässt, ist die Evolution eines Verzweigungsprozesses in zufälliger Umgebung (engl. branching process in random environment (BPRE)) wie die des "gewöhnlichen" Verzweigungsprozesses mit dem Unterschied, dass sich die Nachkommensverteilung von Generation zu Generation ändern kann. Man denke beispielsweise an eine Population von Pflanzen mit einem Lebenszyklus von einem Jahr, bei der die Nachkommensverteilung von Wetterverhältnissen beeinflusst wird.

Zum ersten mal wurden BPRE in (Athreya and Karlin 1970, Smith and Wilkinson 1969) eingeführt. Wir halten uns hier an die Darstellung in (Birkner et al. 2005).

Es sei Δ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{N}_0$, ausgestattet mit Totalvariationsabstand Polnisch ist. Ferner sei Q eine Δ-wertige Zufallsvariable und $\Pi = (Q_1, Q_2, \ldots)$ eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen mit derselben Verteilung wie Q.

Definition 3.11. Eine Folge $Z := (Z_n)_{n=0,1,\ldots}$ von $\mathbb{N}_0$-wertigen Zufallsvariablen ist ein *Verzweigungsprozess in zufälliger Umgebung* Π falls Z_0 unabhängig von Π ist und gegeben Π die Folge Z eine Markovkette ist mit

$$\mathbf{P}(Z_n = j | Z_{n-1} = i, \Pi = (q_1, q_2, \ldots)) = \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{i} \xi_k^{(q_n)} = j\right)$$

für alle $n \geq 1$, $i, j \in \mathbb{N}_0$ und $q_1, q_2, \ldots \Delta$. Dabei sind $\xi_1^{(q_i)}, \xi_2^{(q_i)}, \ldots$ u.i.v. q_i verteilt.

Im Folgenden nehmen wir immer $Z_0 = 1$ f.s. an. Mit Z kann man wie folgt eine Irrfarht $S = (S_0, S_1, \ldots)$ assoziieren. Sei $S_0 = 0$ und definiere die Inkremente von S durch $X_n = S_n - S_{n-1}$, $n \geq 1$, wobei

$$X_n := \log \sum_{y=0}^{\infty} y Q_n(\{y\}),$$

u.i.v. Kopien von

$$X := \log \sum_{y=0}^{\infty} y Q(\{y\})$$

sind. Wir nehmen an, dass X f.s. endlich ist. Dann gilt

$$\mu_n := \mathbf{E}[Z_n|\Pi] = e^{S_n} \qquad f.s.$$

Je nach Verteilung von Q ist gibt es drei Möglichkeiten:

1. *Superkritischer Fall:* Wenn $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ f.s. gilt, dann ist $\mu_n \to \infty$ f.s.
2. *Subrkritischer Fall:* Wenn $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ f.s. gilt, dann ist $\mu_n \to 0$ f.s.
3. *Kritischer Fall:* Wenn $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ und $\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty$ f.s. gilt, dann ist $\limsup_{n\to\infty} \mu_n = \infty$ und $\liminf_{n\to\infty} \mu_n = 0$ f.s.

Wir betrachten nun die Aussterbewahrscheinlichkeiten in diesen Fällen. Für $m \leq n$ gilt

$$\mathbf{P}(Z_n > 0|\Pi) \leq \mathbf{P}(Z_m > 0|\Pi) \leq \mu_m$$

und es folgt

$$\mathbf{P}(Z_n > 0|\Pi) \leq \min_{m\leq n} \mu_m = \exp\left(\min_{m\leq n} S_m\right).$$

Im kritischen und subkritischen Fall konvergiert die rechte Seite f.s. gegen 0 und deswegen gilt in diesen Fällen auch nach Mitteln über Π (wie intuitiv erwartet werden konnte)

$$\mathbf{P}(Z_n > 0) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad f.s.$$

Anders als bei "gewöhnlichen" Verzweigungsprozessen ist es bei BPRE auch im superkritischen Fall möglich, dass die Population fast sicher ausstirbt. Starke Fluktuationen der zufälligen Umgebung wirken nämlich wie "Katastrophen" auf die Population. Allgemein gilt das folgende Resultat, dass in (Smith 1968, Smith and Wilkinson 1969) bewiesen ist.

Satz 3.12. *Es sei* $\mathbf{E}[|X|] < \infty$, *dann ist die Überlebenswahrscheinlichkeit des BPRE Z positiv, d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n > 0) > 0$$

genau dann, wenn

$$\mathbf{E}[X] > 0 \quad \textit{und} \quad \mathbf{E}[\log(1 - Q(\{0\}))] > -\infty.$$

Die Bedingung $\mathbf{E}[X] > 0$ impliziert, dass Z superkritisch ist, was nach oberen Überlegungen notwendig für Überleben mit positiver Wahrscheinlichkeit ist. Die zweite Bedingung besagt insbesondere, dass die Wahrscheinlichkeit für "Katastrophen" $Q(\{0\})$ nahe an 1 ist,

vernachlässigbar klein ist.

Beispiel 3.13. Für $l \in (0,1)$ setze $q_l(0) = 1-l$ und $q_l(\lceil 2/l \rceil) = l$. Dadurch ist eine *einparametrige* Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ definiert mit Mittelwert

$$m_l = l \cdot \lceil 2/l \rceil > 1.$$

Sei nun der Parameter l Realisierung der Zufallsvariablen L mit Verteilung

$$\mathbf{P}(L \leq x) = C(-\log x)^{-\alpha}, \quad x \in (0,1).$$

Dabei ist $\alpha \in (0,1)$ fest und C ist eine Normierungskonstante. Wir setzen $Q = q_l$, wenn $L = l$ ist. Dann gilt

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\log(L \cdot \lceil 2/L \rceil] > 0$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\log(1 - Q(\{0\}))] = \mathbf{E}[\log L] &= -C \int_0^1 \log x \frac{1}{x} \alpha (\log x)^{\alpha - 1}] = -C \frac{(\log x)^{1+\alpha}}{1+\alpha} \Big|_0^1 \\ &= \frac{C}{1+\alpha} \lim_{A \to 0} (\log A)^{1+\alpha} = -\infty. \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

Athreya, K. B. and Karlin, S.: 1970, Branching processes with random environments, *Bull. Amer. Math. Soc.* **76**, 865–870.

Athreya, K. B. and Ney, P. E.: 1972, *Branching processes*, Springer-Verlag, New York. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 196.

Birkner, M., Geiger, J. and Kersting, G.: 2005, Branching processes in random environment—a view on critical and subcritical cases, *Interacting stochastic systems*, Springer, Berlin, pp. 269–291.

Biskup, M.: 2007, PCMI Undergraduate Summer School. Lecture notes available at `http://www.math.ucla.edu/~biskup/PDFs/PCMI/PCMI-notes.pdf`.

Harris, T. E.: 1963, *The theory of branching processes*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 119, Springer-Verlag, Berlin.

Jagers, P.: 1975, *Branching processes with biological applications*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], London. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics—Applied Probability and Statistics.

Klenke, A.: 2013, *Wahrscheinlichkeitstheorie.*, 3nd revised ed. edn, Springer.

Lamperti, J.: 1967, Limiting distributions for branching processes, *Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66), Vol. II: Contributions to Probability Theory, Part 2*, Univ. California Press, Berkeley, Calif., pp. 225–241.

Lyons, R. with Peres, Y.: 2014, *Probability on Trees and Networks*, Cambridge University Press. In preparation. Current version available at `http://mypage.iu.edu/~rdlyons/`.

Pakes, A. G.: 1971, Some limit theorems for the total progeny of a branching process, *Advances in Appl. Probability* **3**, 176–192.

Smith, W. L.: 1968, Necessary conditions for almost sure extinction of a branching process with random environment, *Ann. Math. Statist* **39**, 2136–2140.

Smith, W. L. and Wilkinson, W. E.: 1969, On branching processes in random environments, *Ann. Math. Statist.* **40**, 814–827.

van der Hofstad, R.: 2014, *Random Graphs and Complex Networks. Vol. I*, current version available at `http://www.win.tue.nl/~rhofstad/`.