Frage: Wie berechnen wir $\int_R f\,dx$?

Idee: Zurückführung auf 1-dim Integral durch Sukzessive Integration

→ Fubini

I.1.5 Thm. (Satz von Fubini, einfache Version)

Seien $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ Rechteckmengen und $f: A \times B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

Schreibe für $x \in A$, $g_x : B \to \mathbb{R}$, $g_x(y) = f(x,y)$

und
$$\mathcal{L}(x) = \underline{\int_B} g_x(y)\,d^m y =: \underline{\int_B} f(x,y)\,dy$$
$$\mathcal{U}(x) = \overline{\int_B} g_x\,d^m y$$

Dann sind auch $\mathcal{L}$ und $\mathcal{U}$ R.-int'bar auf A

und es gilt
$$\int_A \mathcal{L}(x)\,d^n x = \int_A \mathcal{U}(x)\,d^n x = \int_{A\times B} f(x,y)\,d^{n+m}(x,y)$$
$$=: \int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy$$

I.1.6 Bem. + Folgerungen:

(1) Wenn f wie in I.1.5, dann ist die Integrationsreihenfolge vertauschbar:

$$\int_A \left(\underline{\int}_B g_x \, dy\right) dx = \int_A \left(\overline{\int}^B g_x \, dy\right) dx$$

$$= \int_B \left(\underline{\int}_A f(x,y)\, dx\right) dy = \int_B \left(\overline{\int}_A f(x,y)\, dx\right) dy$$

(2) „Meistens" ist auch $g_x(\cdot)$ R.-int'bar, also $\mathcal{L}(x) = \mathcal{U}(x)$.

z.B. wenn $f \in C^0(A \times B)$.

(3) Für $A = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ und $f \in C^0(A, \mathbb{R})$ ist

$$\int_A f(x)\, dx = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\ldots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \right) \ldots \right) dx_n$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \ldots dx_1$$

sukzessive 1-dim. Integration.

I.1.7 **Def.:** Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt

und $f: C \to \mathbb{R}$.

Dann heißt f Riemann-int'bar auf C

$\Leftrightarrow$ $f \cdot 1_C$ ist R.-int'bar auf A

für eine Rechteckmenge A mit $C \subset A$.

setze $$\int_C f(x)\,dx = \int_A f \cdot 1_C \,dx.$$

I.1.8 **Bsp.:** $C = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

also $C \subset [-1,1] \times [-1,1]$.

Berechne $v(C)$, den Flächeninhalt:

Sei $$g_x(y) = 1_C(x,y) = \begin{cases} 1, & -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{[-1,1]} g_x(y)\,dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy$$

$$= 2 \cdot \sqrt{1-x^2}.$$

$$\Rightarrow v(C) = \int_{[-1,1]\times[-1,1]} 1_C \, dx\,dy = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx, \qquad \begin{aligned} x &= \sin u \\ dx &= \cos u \, du \end{aligned}$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \, du \qquad \begin{aligned} \cos 2u &= \cos^2 u - \sin^2 u \\ &= 2\cos^2 u - 1 \\ \cos^2 u &= \frac{1}{2}(1+\cos 2u) \end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2u)\, du$$

$$= \pi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2u \, d(2u)$$

$$= \pi + \int_0^{\pi} \cos u \, du = \pi \;/\!/$$

Frage: Warum ist 1_C R.-int'bar auf $[-1,1]^2$?

I.1.9 Def.:

Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt (n-dimensionale)

Nullmenge $:\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$ ex. Folge von Rechteckmengen $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$

mit $N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(R_k) \leq \varepsilon.$$

Bsp.: $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

ist eine n-dim. Nullmenge.

Sei $R_k = [-k,k] \times \ldots \times [-k,k] \times \left[-\frac{\varepsilon}{k^{n-1} \cdot 2^{n+k-2}}, \frac{\varepsilon}{\ldots}\right]$

also $v(R_k) = \frac{\varepsilon}{2^k}$ und $\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \supset \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

und $\sum_{k=1}^{\infty} v(R_k) = \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1\right) = \varepsilon.$

I.1.10 **Prop.:** Es gilt

(a) N Nullmenge, $M \subset N \Rightarrow M$ Nullmenge

(b) $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Nullmengen $\Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$ Nullmenge

(c) N abzählbar $\Rightarrow N$ Nullmenge.

(Lebesgues Integrabilitätskriterium)

I.1.11 **Thm.:** Sei $R \subset \mathbb{R}^n$ eine Rechteckmenge und $f: R \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Sei $D = \{x \in R \mid f \text{ ist nicht stetig bei } x\}$.

Dann gilt: f ist Riemann-integrierbar auf R

$\Leftrightarrow D$ ist eine Nullmenge.

I.1.12 **Korollar:** Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt.

Dann ist 1_C R.-int'bar

$\Leftrightarrow \partial C$ ist eine Nullmenge.

Bsp.: $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

I.1.13 **Satz:** Folgende Mengen in $\mathbb{R}^n$ sind Jordan-Nullmengen:

(a) Hyperflächen der Form

$$N_c = f^{-1}(c), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \; c \in \mathbb{R}$$

mit $\nabla f(x) \neq 0$ für $x \in N_c$.

(b) Graphen stetiger Funktionen

$$G_h = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1})) \mid (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}\}$$

$h \in C^0(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$

I.1.14 Beispiele:

(1) Sei $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt, ∂K $(n-1)$-dim Nullmenge in $\mathbb{R}^{n-1}$ und $f: K \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(K) \subset [0, \infty)$.

Sei $D = \{(x, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x_n \leq f(x)\}$

Dann ist ∂D eine n-dim Nullmenge und $V(D) := \int_D 1_D \, d^n x$ ist wohldef.

Nach Fubini gilt dann:

$$V(D) = \int_K \int_0^{f(x)} dx_n \, d^{n-1}x = \int_K f(x)\, d^{n-1}x.$$

Bew.: $\partial D = K\times\{0\} \cup \operatorname{graph} f \cup \{(x, f(x)) \mid x\in\partial K\}$

∂K kp. $\Rightarrow m = \max_{\partial K} f \geq 0$ ex.

$\Rightarrow \{(x, f(x)) \mid x\in\partial K\} \subset \partial K\times[0,m]$

∂K $(n-1)$-dim Nullm. $\Rightarrow \partial K\times[0,m]$ ist n-dim Nullmenge

$\Rightarrow \partial D$ ist n-dim Nullmenge $\Rightarrow$ Beh.

(2) Sei $G\subset\mathbb{R}^3$ eine kompakte Menge der Form

$$G = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} a\le x\le b \\ c(x)\le y\le d(x) \\ e(x,y)\le z\le f(x,y) \end{array} \right\}$$

mit $c,d: [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig mit $c(x)\le d(x)$ f.a. $x\in[a,b]$

$e,f: [a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig und $e(x,y)\le f(x,y)$ f.a. $x\in[a,b]$, $y\in[c(x),d(x)]$

Sei $h: G\to\mathbb{R}$ Riemann-int'bar.