IV.3.4 Beispiel: Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakte Teilmenge

$\rho : K \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar

und $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$.

Sei $a(x) = \min_{p \in K} \|x-p\| > 0$ ← da K kp.!

für $\|x\|$ = euklid. Norm

Also gilt: $\frac{1}{\|x-y\|} \le \frac{1}{a(x)}$ f.ü. $y \in K$

$\Rightarrow$ $y \mapsto \frac{\rho(y)}{\|x-y\|}$ hat f.ü. $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$

die L.-int'bare Majorante $y \mapsto \frac{1}{a(x)} \rho(y)$

$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) = - \frac{x^i - y^i}{\|x-y\|^3}$

$\left| \quad " \quad \right| \le \frac{1}{a(x)^2}$

IV.3.2 $\Rightarrow$ ... $u(x) := \int_K \frac{\rho(y)}{\|x-y\|} \, d^3\lambda(y)$

ist wohldef. und beliebig oft diff'bar in $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$.

BRUNNEN

IV 3.4 Beispiel: Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakte Teilmenge

$\rho : K \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar

und $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$.

Sei $a(x) = \min_{p \in K} \|x-p\| > 0$ ← da K kp.!

für $\|x\|$ = euklid. Norm

Also gilt: $\frac{1}{\|x-y\|} \leq \frac{1}{a(x)}$ f.a. $y \in K$

$\Rightarrow$ $y \mapsto \frac{\rho(y)}{\|x-y\|}$ hat f.a. $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$

die L.-int'bare Majorante $y \mapsto \frac{1}{a(x)} \rho(y)$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) = -\frac{x^i - y^i}{\|x-y\|^3}$$

$$\left| \quad " \quad \right| \leq \frac{1}{a(x)^2}$$

IV 3.2 $\Rightarrow$ $u(x) := \int_K \frac{\rho(y)}{\|x-y\|} \, d^3\lambda(y)$

ist wohldef. und beliebig oft diff'bar in $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$.

Aus $\Delta\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) = 0$

folgt $\Delta u \equiv 0$.

Physikalisch: Für $\rho: K \to [0,\infty)$

und physikalische Dichtefunktion

$\Rightarrow M = \int_K \rho \, d^3 vol$ = Gesamtmasse

Für $e \in S^2$ und $r > 0$ mit $r \cdot e \notin K$

$$\Rightarrow r \cdot u(re) = r \cdot \int_K \frac{\rho(y)}{\|re - y\|} d^3 vol$$

$$= \int_K \frac{\rho(y)}{\|e - \frac{y}{r}\|} d^3 vol$$

Betrachte $r_n \to \infty$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|e - \frac{y}{r_n}\|} \to 1$$

und $\left| \frac{\rho(y)}{\|e - \frac{y}{r_n}\|} \right| \leq 2|\rho(y)|$ für $r_n > r_0$ groß genug

Lebesgue-Majo-Konv $\Rightarrow \lim\limits_{r \to \infty} r u(re) = M$

Also $\boxed{u(re) \sim \frac{M}{r}}$

$\Rightarrow u(x)$ asymptotisch wie Punktmasse-Potential.

IV.3.5) **Satz:**

Sei $f : \underbrace{[a_1, b_1] \times \_\_ \times [a_n, b_n]}_{R} \to \mathbb{R}$

eine beschränkte Funktion.

Dann gilt:

(a) f Riemann-int'bar $\Leftrightarrow$ $D(f) = \{x \mid f$ nicht stetig$\}$ ist λ^n-Nullmenge

(b) f Riemann-int'bar $\Rightarrow$ f Lebesgue-int'bar

Bew (a) ist genau I.1.11. (Leb. Int.-Kriterium)

(b) Da $|f|$ beschränkt ist, genügt zu zeigen, daß $|f|$ messbar ist. OBdA $f = |f| \geq 0$.

Sei $U_n(f) = \{x \in R \mid \operatorname{dist}(x, D(f)) < \frac{1}{n}\}$.

Also $U_n(f)$ offen $\subset R$, $D(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n(f)$

$\Rightarrow A_n := R \setminus U_n(f)$ abg. in R.

und f ist stetig auf A_n

$\Rightarrow f \cdot 1_{A_n}$ ist messbar $\overset{f \text{ besch.}}{\Rightarrow}$ $f \cdot 1_{A_n}$ Leb.-int'bar

$f \cdot 1_{A_n} \uparrow f \cdot 1_{R \setminus D(f)}$ Monotone Konv. $\Rightarrow$ $f \cdot 1_{R \setminus D(f)}$ L-int'bar

$D(f)$ Null-Menge $\Rightarrow$ f ebenfalls L.-int'bar. $\square$

Bem.: $1_{\mathbb{R}\cap\mathbb{Q}^n}$ ist L.-int'bar, aber nicht Riemann-int'bar.

$D(1_{\mathbb{R}\cap\mathbb{Q}^n}) = \mathbb{R}$, keine Nullmenge. $\square$

§.4 Fubini

V.4.1 Def.: Seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i=1,2$

Maßräume, und

$$\mathcal{A} = \sigma(\{A_1 \times A_2 \mid A_i \in \mathcal{A}_i\})$$

die Produkt-σ-Algebra.

Seien $A \subset X_1 \times X_2$ und $x_i \in X_i$, $i=1,2$

dann def.

$$A^2_{x_1} := \{y \in X_2 \mid (x_1, y) \in A\} = \mathrm{proj}_2(A \cap \{x_1\} \times X_2)$$

$$A^1_{x_2} := \{y \in X_1 \mid (y, x_2) \in A\}$$

Sei $f: X_1 \times X_2 \to Y$ eine Abb., so def.

$f^2_{x_1}: X_2 \to Y$, $f^1_{x_2}: X_1 \to Y$ durch

$$f^2_{x_1}(x) = f(x_1, x), \quad f^1_{x_2}(x) = (x, x_2)$$

V 4.2 **Lemma:**

Sei $(X,\mathcal{A}) = (X_1,\mathcal{A}_1) \otimes (X_2,\mathcal{A}_2)$

(a) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^2_{x_1} \in \mathcal{A}_2$ f.a. $x_1 \in X_1$

$A^1_{x_2} \in \mathcal{A}_1$ f.a. $x_2 \in X_2$

(b) $f : (X,\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar

$\Rightarrow f^1_{x_2}, f^2_{x_1}$ messbar f.a. x_1, x_2

Bew: Übung.

V. 4.3 **Satz:** Seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1,2$

σ-finite Maßräume, d.h.

ex. $(A^i_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_i$

mit $\mu_i(A^i_n) < \infty \quad \forall n$

und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^i_n = X_i$.

Dann ex. genau ein Maß μ auf $(X,\mathcal{A}) = (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$

mit $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \quad \forall A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1,2.$

Beweisskizze:

Beweis verläuft analog zu § IV.2.

Entscheidende Schritt ist, daß

μ auf $\{A_1 \times A_2 \mid A_i \in \mathcal{A}_i\}$

σ-finit und σ-additiv ist.

Bew. 1.) Seien $(A_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben bei σ-finit von X_i.

$\Rightarrow \mu(A_n^1 \times A_m^2) < \infty$ f.a. $n, m \in \mathbb{N}$

und $\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} A_n^1 \times A_m^2 = X_1 \times X_2$.

2.) Seien $(A_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_i$, $i=1,2$

mit $(A_n^1 \times A_n^2) \cap (A_m^1 \times A_m^2) = \emptyset$ f.a. $n \neq m$

und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^1 \times A_n^2 = B_1 \times B_2$, $B_i \in \mathcal{A}_i$.

Es gilt also $1_{B_1}(x_1) \cdot 1_{B_2}(x_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n^1}(x_1) \cdot 1_{A_n^2}(x_2)$.

Wir haben die monotone Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{m} 1_{A_1^n}(x_1)\cdot 1_{A_2^n}(x_2) \uparrow 1_{B_1}(x_1)\cdot 1_{B_2}(x_2)$$

$$\Rightarrow \forall x_1\in X_1: \int_{X_2} \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} 1_{A_1^n}(x_1)\cdot 1_{A_2^n}(x_2)\, d\mu_2(x_2)$$

$$= 1_{B_1}(x_1)\cdot \int_{X_2} 1_{B_2}(x_2)\, d\mu_2(x_2)$$

$$= 1_{B_1}(x_1)\cdot \mu_2(B_2).$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} 1_{A_1^n}(x_1)\cdot \mu_2(A_2^n)$$

konv. ebenfalls monoton

$$\Rightarrow \mu_1(B_1)\cdot \mu_2(B_2) = \int_{X_1} \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} 1_{A_1^n}(x_1)\cdot \mu_2(A_2^n)\, d\mu_1(x_1)$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu_1(A_1^n)\cdot \mu_2(A_2^n)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(A_1^n)\cdot \mu_2(A_2^n)$$

Also $\mu(B_1\times B_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_1^n\times A_2^n)$. ☐

Notation: $\mu =: \mu_1\otimes\mu_2$ heißt das **Produkt-Maß**.

IV.4.4 **Satz:** Seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1,2$ σ-finite Maßräume und $(X, \mathcal{A}, \mu) = (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$.

Sei $A \in \mathcal{A}$ und

$$g_A : X_1 \to [0,\infty], \quad g_A(x) = \mu_2(A_x^2)$$

$$h_A : X_2 \to [0,\infty], \quad h_A(x) = \mu_1(A_x^1).$$

Dann sind g_A $\mathcal{A}_1$-messbar,

h_A $\mathcal{A}_2$-messbar und es gilt

$$\mu(A) = \int_{X_1} g_A \, d\mu_1 = \int_{X_2} h_A \, d\mu_2 .$$

IV.4.5 **Satz:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu) = (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ wie in IV.4.4.

Sei $f : X \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar.

Dann ist $g_f : X_1 \to [0,\infty]$ mit

$$g_f(x_1) = \int_{X_2} f_{x_1}^2(y) \, d\mu_2(y)$$ $\mathcal{A}_1$-messbar

und $h_f : X_2 \to [0,\infty]$ mit

$$h_f(x_2) = \int_{X_1} f_{x_2}^1(y) \, d\mu_1(y)$$

~~ist~~ $\mathcal{A}_2$-messbar.

und es gilt

$$\int_{X_1\times X_2} f\,d\mu \overset{(a)}{=} \int_{X_1} g_f\,d\mu_1 \overset{(b)}{=} \int_{X_2} h_f\,d\mu_2 .$$

Bew.: Genügt Beweis von (a).

Sei $\mathcal{N} = \{ f : X_1\times X_2 \to [0,\infty] \mid g_f$ ist $\mathcal{A}_1$-messbar mit $\int_X f\,d\mu = \int_{X_1} g_f\,d\mu_1 \}$.

Dann gilt:

(1): V. 4.4 $\Rightarrow$ $1_A \in \mathcal{N}$ f.a. $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

(2): $f \in \mathcal{N}$, $\lambda > 0$ $\Rightarrow$ $\lambda f \in \mathcal{N}$,

denn $(\lambda f)^2_{x_1} = \lambda f^2_{x_1}$

(3) $f, f' \in \mathcal{N} \Rightarrow f + f' \in \mathcal{N}$, denn $(f+f')^2_{x_1} = f^2_{x_1} + f'^2_{x_1}$

(4) Sei $(f_n) \subset \mathcal{N}$, $f_n \uparrow f$

dann gilt $\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)_{x_1} = \lim_{n\to\infty} (f_n)^2_{x_1}$

und aus monotoner Konvergenz folgt $\int_{X_1\times X_2} \lim f_n\,d\mu$

$\Rightarrow f = \lim f_n \in \mathcal{N}$. $\qquad = \lim \int_{X_1\times X_2} f_n\,d\mu$

$\Rightarrow \mathcal{N} = \{$alle $\mathcal{A}$-messbaren $f : X_1\times X_2 \to [0,\infty] \}$ $\Rightarrow$ Beh. ☐

Beweis von V.4.4:

1) OBdA $\mu_1(X_1) < \infty$, $\mu_2(X_2) < \infty$.

2) Es genügt z.B., daß g_A f.a. $A \in \mathcal{A}$ messbar ist,

und $\mu(A) = \int_{X_1} g_A \, d\mu_1$,

denn die Aussage für h_A ist vollkommen analog.

3) Sei $\mathcal{D} := \{ A \in \mathcal{A} \mid g_A : X_1 \to [0,\infty]$ ist $\mathcal{A}_1$-messbar

und $\mu(A) = \int_{X_1} g_A \, d\mu_1 \}$

Dann gilt: Für $A = A_1 \times A_2$, $A_i \in \mathcal{A}_i$

ist $g_A(x) = \begin{cases} \mu_2(A_2), & x \in A_1 \\ 0, & x \notin A_1 \end{cases}$

also $g_A = 1_{A_1} \cdot \mu_2(A_2)$

$\Rightarrow$ messbar und $\int_{X_1} g_A \, d\mu_1 = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$.

$\Rightarrow$ $A_1 \times A_2 \in \mathcal{D}$ f.a. $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$.

Des Weiteren gilt: $X_1 \times X_2 = X \in \mathcal{D}$,

Seien $A, B \in \mathcal{D}$ mit $A \subset B$.

$\Rightarrow (B\setminus A)^2_x = B^2_x \setminus A^2_x$

$\Rightarrow g_{B\setminus A}(x) = \mu_2(B^2_x) - \mu_2(A^2_x) = g_B(x) - g_A(x)$ messbar

und $\int_{X_1} g_{B\setminus A}\, d\mu_1 = \int_{X_1} g_B\, d\mu_1 - \int_{X_1} g_A\, d\mu_1$

$= \mu(B) - \mu(A) = \mu(B\setminus A)$

$\Rightarrow B\setminus A \in \mathcal{D}.$

Übung: Sei $(A_n) \subset \mathcal{D}$ paarweise disjunkt

$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}.$

Also ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System wie in der Musterlösung zu Aufg. 3, Serie 8.

Das System $\{A_1 \times A_2 \mid A_i \in \mathcal{A}_i\}$

ist ein Teilmengensystem, welches die Voraussetzungen erfüllt:

$A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{E}$, ex. $(E_n) \subset \mathcal{E}$ mit $X = \bigcup E_n$

Also gilt wie in der Lösung zu Serie 8, Aufg 3

Schritt 3 $\Rightarrow \underset{\mathcal{A}}{\underset{\|}{\sigma(\mathcal{E})}} \subset \mathcal{D} \Rightarrow$ Beh. $\square$

V 4.6 Theorem (Satz v. Fubini)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu) = (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$

μ_i jeweils σ-finit.

Sei $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel.

Dann gilt:

Ex. μ_i-Nullmengen $N_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$

$f^2_{x_1}$ μ_2-integrabel f.a. $x_1 \in X_1 \setminus N_1$, $f^1_{x_2}$ μ_1-int'bar f.a. $x_2 \in X_2 \setminus N_2$

und mit $g_f(x_1) := \begin{cases} \int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2), & \text{falls } x_1 \in X_1 \setminus N_1 \\ 0, & \text{falls } x_1 \in N_1 \end{cases}$

$$h_f(x_2) := \begin{cases} \int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1), & \text{falls } x_2 \in X_2 \setminus N_2 \\ 0, & \text{falls } x_2 \in N_2 \end{cases}$$

gilt: g_f ist μ_1-integrabel und

h_f ist μ_2-integrabel, und

$$\int_X f\, d\mu = \int_{X_1} g_f\, d\mu_1 = \int_{X_2} h_f\, d\mu_2 .$$

Beweis: Es genügt Betrachtung von g_f:

$$\text{IV}.4.5 \Rightarrow g_{|f|}: X_1 \to [0,\infty],\ g_{|f|}(x) = \int_{X_2} |f(x,x_2)|\,d\mu_2(x_2)$$

ist $\mathcal{A}_1$-messbar

und $$\int_X |f|\,d\mu = \int_{X_1} g_{|f|}\,d\mu_1$$

$$= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f(x_1,x_2)|\,d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1)$$

$< \infty$ nach Voraus., da f μ-integrabel

$\text{IV}.1.17 \Rightarrow g_{|f|}(x_1) < \infty$ für μ_1-fast alle $x_1 \in X_1$.

$\Rightarrow$ ex. N_1 μ_1-Nullmenge, s.d.

$f^2_{x_1}$ μ_2-integrabel f.a. $x_1 \in X_1 \setminus N_1$

Nach Umdefinition $g_f(x_1) = 0$ für $x_1 \in N_1$

$\Rightarrow$ IV.4.5 auf $(f^{\pm})^2_{x_1} = (f^2_{x_1})^{\pm}$ anwenden

$\Rightarrow$ Beh. ☐

IV.4.7 Beispiel

Betrachte die Funktion

$$f : [0,1] \times [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Es gilt $\int_0^1 f(x,y)\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2} - 2y^2 \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{1}{y}\int_0^{\arctan\frac{1}{y}} du - 2\frac{1}{y}\int_0^{\arctan\frac{1}{y}} \cos^2 u\,du \qquad \Big|\ \begin{array}{l} x = y\tan u \\ dx = \frac{y}{\cos^2 u}\,du \end{array}$$

$$= \frac{1}{y}\arctan\frac{1}{y} - \frac{1}{y}\left(\arctan\frac{1}{y} + \sin\arctan\frac{1}{y}\cdot\cos\arctan\frac{1}{y}\right)$$

$$= -\frac{1}{y}\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{y^2}}{1+\frac{1}{y^2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{y^2}}}\right)$$

$$= -\frac{1}{y}\cdot\sqrt{\frac{1}{y^2+1}}\cdot\sqrt{\frac{y^2}{y^2+1}} = -\frac{1}{(1+y^2)}$$

$$\Rightarrow \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right)dy = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}$$

$$= -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$$

Andererseits $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \, dy \right) dx = +\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow$ Fubini nicht anwendbar auf f

$\Rightarrow \iint_{[0,1]^2} |f| \, d^2(x,y) = \infty .$

§5. Transformationsformel

IV.5.1 **Def.:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum

und $(Y, \mathcal{B})$ Raum mit σ-Algebra $\mathcal{B}$.

Sei $\phi: X \to Y$ eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbare Abb.

dann $\phi_*\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ durch

$$(\phi_*\mu)(B) = \mu(\phi^{-1}(B)).$$

$\phi_*\mu$ heißt das Bildmaß von μ unter ϕ.

Üb.-Aufg.: $\phi_*\mu$ ist wieder ein Maß.

IV.5.2 **Satz:** Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B})$, $\phi: X \to Y$

wie oben. Dann gilt:

(a) Für alle $f: Y \to [0, \infty]$ $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar

$$(*) \quad \int_Y f \, d\phi_*\mu = \int_X (f \circ \phi) \, d\mu$$

(b) $f \in \mathcal{L}^1(Y, \mathcal{B}, \phi_*\mu) \Leftrightarrow f \circ \phi \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$

und $(*)$ gilt.

Beweis:

Schritt 1: Für $B \in \mathcal{B}$, $f = 1_B$.

$\Rightarrow \int_Y 1_B \, d\phi_* \mu = (\phi_* \mu)(B) = \mu(\phi^{-1}(B))$

$= \int_Y 1_{\phi^{-1}(B)} \, d\mu = \int_Y 1_B \circ \phi \, d\mu$

Schritt 2: Jede messbare Funktion $f : Y \to [0,\infty]$ läßt sich durch Elementarfunktion

$$\sum_{n=1}^{N} a_n 1_{A_n} \uparrow f$$

monoton approximieren

S. monoton Kvg $\Rightarrow$ Beh. $\square$

Bem.: Theorem IV. 3.10.

Falls $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear

und $\mu = \lambda^n \Rightarrow \Phi_* \lambda^n = |\det \Phi| \cdot \lambda^n$.

Betrachte nun

$U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathcal{A} = \mathcal{B}^n$

$\phi : U \to V$ C^1-Diffeomorphismus

$\mathcal{A}_U = \{ U \cap B \mid B \in \mathcal{B}^n \}$

$\Rightarrow$ $\phi : \mathcal{A}_U \to \mathcal{A}_V$ messbar.

V.5.3 Theorem (Transformationsformel)

(a) $\phi_*^{-1} \lambda^n$ ist gegeben durch

$$(*) \quad (\phi_*^{-1} \lambda^n)(A) = \lambda^n(\phi(A)) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A \cdot |\det D\phi| \, d\lambda^n.$$

(b) $\forall f : V \to [0, \infty]$ $\mathcal{B}_V$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar gilt:

$f \circ \phi$ ist $\mathcal{B}_U$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar und

$$\int_V f \, d\lambda^n = \int_U f \circ \phi \, d\phi_*^{-1} \lambda^n = \int_U (f \circ \phi) \, |\det D\phi| \, d\lambda^n$$

Bew. (b) folgt aus (a) mittels V.5.2.

Beweis von ⓐ:

Wir sagen (*) gilt lokal

$\Leftrightarrow$ $\forall x \in U$ ex. Umgebung $U(x) \subset U$

so daß (*) für $U(x)$ und $\phi|_{U(x)}$ gilt.

Bem.: Wenn (*) für eine Umgebung $U(x)$ gilt

so wegen ⓑ auch für alle kleineren Umgebungen.

(1) Falls (*) für eine abzählbare Überdeckung

von Umgebungen bewiesen, so folgt

(*) wegen σ-Additivität für alle $A \in \mathcal{A}_n$.

(2) Die lokale Form von (*) gilt in

Dimension $n = 1$

Bew.: Sei $\phi : I \to J$ ein C^1-Diffeo

zwischen Intervallen. OBdA $I = (a,b)$

$J = (\phi(a), \phi(b))$

$\phi' > 0$

$$\lambda^1(\phi(I)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} 1\, dt$$

$$\overset{=}{\scriptstyle \uparrow} \int_a^b \phi'(s)\, ds \Rightarrow (*)$$

IV.3-5 Gleichheit von Riem.- und Lebesgue-Integr.

(3) (*) gilt für Permutationen der Koordinaten, denn solche Φ sind linear, siehe obige Bem.

(4) Sei $x_0 \in U$ mit $\det D\phi(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ nach Koord.permutation gilt OBdA

$$\frac{\partial \phi^1}{\partial x^1}(x) \neq 0, \quad \phi = (\phi^1, \dots, \phi^n)$$

Betrachte $\psi(x^1, \dots, x^n) = (\phi^1(x^1, \dots, x^n), x^2, \dots, x^n)$

$$\Rightarrow D\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \phi^1}{\partial x^n} \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \psi$ lokal Diffeo bei x_0.

$$\begin{tikzcd} U(x) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & V \\ W \arrow[ur, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

Betrachte $\rho = \phi \circ \psi^{-1}$

$$\Rightarrow \rho(y^1, \dots, y^n) = \rho(\phi^1(x^1, \dots, x^n), x^2, \dots, x^n)$$
$$= (\phi^1(\ldots), \dots, \phi^n(\ldots))$$
$$= (y^1, \chi^2(y), \dots, \chi^n(y))$$

$\Rightarrow \rho$ und ψ lassen jeweils mindestens 1 Koord. fest.

$\phi = \rho \circ \psi$.

Wenn ρ und ψ (*) lokal erfüllen, dann auch ϕ.

(5) Es genügt nach Induktionsbeweis zu zeigen

(**): (*) gilt lokal in $n-1$ Dimension
$\Rightarrow$ (*) gilt lokal in n Dimension

Beweis von (**): Nach (4) können wir

OBdA annehmen, daß
$$\phi(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \phi^2(x), \dots, \phi^n(x))$$

außerdem OBdA $U = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

Dann gilt für die $(n-1)$-dim Scheibchen und $A \subset U_1$
$$(\phi(A))_{x_1} = \phi_{x_1}(A_{x_1})$$
$$D\phi = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \; \dots \; 0 \\ \hline \frac{\partial \phi^2}{\partial x^1} & \\ \vdots & D\phi_{x_1} \\ \frac{\partial \phi^n}{\partial x^1} & \end{array}\right)$$
$$\Rightarrow \det D\phi = \det D\phi_{x_1}$$

Also: Fubini $\Rightarrow$
$$\lambda^n(\phi(A)) = \int_{a_1}^{b_1} \lambda^{n-1}(\phi(A)_{x_1})\, d\lambda^1$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} \lambda^{n-1}(\phi_{x_1}(A_{x_1}))\, d\lambda^1(x_1)$$

Ind.-Annahme
=

Ind.-Annahme
$$= \int_{a_1}^{b_1} \int_{A_{x_1}} |\det D\phi_{x_1}| \, d\lambda^{n-1} \, d\lambda^1(x_1)$$

Fubini
$$= \iint 1_A \, |\det D\phi| \, d\lambda^n$$

$\Rightarrow$ $(\ast\ast)$.

$\square$

BRUNNEN

§ 6 Dichten

V.6.1 **Lemma:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $f: X \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}([0,\infty])$-messbar. Dann ist

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

ein weiteres Maß ν auf $\mathcal{A}$.

Beweis: Übung, verwende S. über monotone Kvg.

V.6.2 **Def.** Seien μ, ν Maße auf $(X, \mathcal{A})$.

Dann heißt eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}([0,\infty))$-messbare Abb.

$$\varphi: X \to [0,\infty)$$

Dichte von ν bzgl. μ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\nu(A) = \int_A \varphi \, d\mu \quad \text{f.a. } A \in \mathcal{A}.$$

Notation $\varphi = \frac{d\nu}{d\mu}$ und $\nu = \varphi \, d\mu$

BRUNNEN

(IV.63) **Lemma:** Seien μ, ν Maße auf $(X, \mathcal{A})$ und sei $(X, \mathcal{A}, \nu)$ σ-finit.

Falls ν eine Dichte $\varphi : X \to [0, \infty)$ bzgl. μ hat, so ist sie μ-f.ü. eindeutig.

Beweis: ν σ-finit $\Rightarrow$ ex. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$

$X_1 \subset X_2 \subset \dots$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = X$, $\nu(X_n) < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Seien φ_1 und φ_2 Dichten von ν bzgl. μ.

Für $A = \{\varphi_1 > \varphi_2\} \in \mathcal{A}$

$$\Rightarrow \int 1_{A \cap X_n} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \, d\mu = \nu(A \cap X_n) - \nu(A \cap X_n) = 0.$$

$$1_{A \cap X_n} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \uparrow 1_A \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

S. monotone Kvg $\Rightarrow \int_X 1_A \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \, d\mu = 0$

IV. 1.19 $\Rightarrow 1_A \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ μ-f.ü.

$\Rightarrow \varphi_1 \leq \varphi_2$ μ-f.ü.

Analog $\varphi_1 \geq \varphi_2$ μ-f.ü. $\square$

IV.6.4 **Def.:** Seien μ, ν Maße auf $(X, \mathcal{A})$

ν heißt <u>absolutstetig</u> bezgl. μ

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall A \in \mathcal{A}: \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$

<u>Notation:</u> $\nu \ll \mu$.

μ und ν heißen <u>singulär</u> zueinander

$\Leftrightarrow$ ex. $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ und $\nu(X \setminus A) = 0$.

Falls $A \in \mathcal{A}$ mit $\lambda(B) = \lambda(A \cap B)$ f.a. $B \in \mathcal{A}$

dann heißt λ auf A konzentriert.

Das ist äquivalent zu: $\lambda(B) = 0$ f.a. $B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$

<u>Also:</u> λ und ν sind zueinander singulär

$\Leftrightarrow$ ex. $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$ und

λ konzentriert auf A, μ konzentriert auf B

<u>Notation:</u> $\mu \perp \nu$.

Seien μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$, dann ist

$\mu + \nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $(\mu + \nu)(A) = \mu(A) + \nu(A)$

wieder ein Maß.

IV.6.5 **Satz:** Sei $(X, \mathcal{A})$ Raum mit σ-Algebra.

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ Maße auf $(X, \mathcal{A})$.

Dann gilt:

(a) $\lambda_1 \perp \mu,\ \lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$

(b) $\lambda_1 \ll \mu,\ \lambda_2 \ll \mu \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$

(c) $\lambda_1 \ll \mu,\ \lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 \perp \lambda_2$

(d) $\lambda_1 \ll \mu,\ \lambda_1 \perp \mu \Rightarrow \lambda \equiv 0.$

Beweis: Übung

IV.6.6 $\boxed{\text{Theorem von Lebesgue-Radon-Nikodym}}$

Seien ν, μ σ-finite Maße auf $(X, \mathcal{A})$ Raum mit σ-Algebra

(a) Dann existieren eindeutige (σ-finite) Maße ν_a, ν_s auf $\mathcal{A}$

s.d. $\nu = \nu_a + \nu_s$, $\nu_a \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$.

(b) Falls ν, μ endliche Maße, so existiert für $\nu_a \ll \mu$ eine eindeutige Dichte $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$, d.h.

$$\nu_a(A) = \int_A \varphi \, d\mu \quad \text{f.a. } A \in \mathcal{A}.$$

das ist Radon-Nikodym

IV.6.7 Beispiele:

(a) Sei λ^n das n-dim Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$

und δ das Dirac'sche Delta-Maß:

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \in A \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ δ ist konzentriert auf $\{0\}$

$\Rightarrow$ $\delta \perp \lambda$ und δ hat keine Dichte bzgl. λ,

denn nach Radon-Nikodym gilt

ν hat Dichte bzgl. μ $\Leftrightarrow$ $\nu \ll \mu$.

(b) Normalverteilung $N(a, \sigma^2)$:

$$\varphi_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

ist die Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $\mathbb{R}$,

nämlich der Gauß'schen Normalverteilung

(c) Cauchy-Verteilung $\varphi_c(x) = \dfrac{c}{\pi(c^2+x^2)}$, $c > 0$

Beweisskizze für IV.6.6.(3):

Schritt 1: Angenommen ν, μ sind endliche Maße mit

$$\nu \leq \mu, \text{ also } \int_X g\,d\nu \leq \int_X g\,d\mu \quad \forall g: X \to [0,\infty] \text{ messbar.}$$

Für $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$:

$$\left|\int_X f\,d\nu\right| \leq \int_X |f|\,d\nu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy-Schwarz} \\ \text{IV.2.2.}}}{\leq} \left(\int f^2 d\nu\right)^{\frac{1}{2}} \nu(X)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \nu(X)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int f^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\nu(X)} \cdot \|f\|_{\mathcal{L}^2(\mu)}.$$

Also: $\mathcal{L}^2(\mu) \subset \mathcal{L}^2(\nu) \subset \mathcal{L}^1(\nu)$

und
$$\mathcal{L}^2(\mu) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_X f\,d\nu$$

ist ein stetig linearer Operator

auf dem Hilbert-Raum $\mathcal{L}^2(\mu)$

$$\left(\langle f, g \rangle = \int_X f g\,d\mu \right)$$

Riesz-Darstellungssatz $\Rightarrow$ ex. $h \in \mathcal{L}^2(\mu)$ mit

$$\int_X f\,d\nu = \int_X f h\,d\mu \quad \text{f.a. } f \in \mathcal{L}^2(\mu).$$

BRUNNEN

Sei $f = 1_A \Rightarrow \nu(A) = \int_A h\,d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow$ h ist Dichte von ν
bzgl. μ

also $h = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Schritt 2: Seien nun μ, ν endlich, mit $\nu \ll \mu$.

Schritt 1 $\Rightarrow$ haben Dichten $g = \frac{d\mu}{d(\mu+\nu)}$, $h = \frac{d\nu}{d(\mu+\nu)}$,

da $\mu \leq \mu+\nu$, $\nu \leq \mu+\nu$.

Sei $N = \{g = 0\}$

$\Rightarrow \mu(N) = \int_N d\mu = \int_N g\,d(\mu+\nu) = 0$

$\Rightarrow$ N ist μ-Nullmenge. $\overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow}$ auch ν-Nullmenge

Definiere $f : X \to [0,\infty)$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{h(x)}{g(x)}, & \text{falls } x \in X \setminus N \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Also f messbar und

$\nu(A) = \nu(A \cap (X \setminus N)) = \int_{A \setminus N} h\,d(\mu+\nu) = \int_{A \setminus N} fg\,d(\mu+\nu)$

$= \int_{A \setminus N} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu$

$\Rightarrow f = \frac{d\nu}{d\mu}$.