V.1.16 **Lemma:**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $A \in \mathcal{A}$ eine Nullmenge und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

$\Rightarrow$ f ist über A int'bar und

$$\int_A f \, d\mu = 0$$

Bew.:

$$\int_A f^{\pm} \, d\mu = \int_X 1_A \cdot f^{\pm} \, d\mu$$

$$= \int_0^\infty \mu(\{x \in A \mid f^{\pm}(x) > t\}) \, dt \leq \int_0^\infty \mu(A) \, dt = 0.$$

$\square$

V.1.17 **Prop.** Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ int'bar

$\Rightarrow$ f μ-f.ü. endlich

d.h. $\mu(\{x \in X \mid f^{\pm}(x) = \pm\infty\}) = 0$

Bew.: $\mu(\{x \in X \mid f^{\pm}(x) = +\infty\}) \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \mu(\{x \in X \mid f^{\pm}(x) > t\}) \geq \varepsilon \;\; \forall t \geq 0$

$\Rightarrow \int_X f^{\pm} \, d\mu = \int_0^\infty \mu(f^{\pm} > t) \, dt \geq \int_0^\infty \varepsilon \, dt = +\infty$ ↯

$\square$

BRUNNEN

IV.1.18 **Prop.** Seien $f,g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $f=g$ μ-f.ü.

Dann gilt:

a) $f,g \geq 0 \Rightarrow \int f\,d\mu = \int g\,d\mu$

b) f integrierbar $\Leftrightarrow$ g integrierbar und dann auch $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$

Bew.: a) $f=g$ μ-f.ü. $\Rightarrow \mu(\{f(x)>t\}) = \mu(\{g(x)>t\})$

$\Rightarrow \int f\,d\mu = \int g\,d\mu$

b) $|f|=|g|$ μ-f.ü.

f integrierbar $\Leftrightarrow$ $|f|$ integrierbar, da a) $\Rightarrow$ Beh. $\square$

IV.1.19 **Prop.** Sei $f: X \to [0,\infty]$ μ-integrierbar. Dann gilt:

$\int f\,d\mu = 0 \Leftrightarrow f=0$ f.ü.

Bew.: „$\Leftarrow$" aus 1.18.

„$\Rightarrow$": $\int f\,d\mu = 0 \Rightarrow \underbrace{\mu\{x \mid f(x)>t\}}_{\text{da monoton in } t} = 0$ f.ü. $t>0$

$\Rightarrow \mu\{x \mid f(x) > \frac{1}{n}\} = 0 \;\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mu\{x \mid f(x)>0\} = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \mid f(x) > \frac{1}{n}\}\right) = 0.$ $\square$

BRUNNEN

V.1.20 Lemma von Fatou

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$
Folge von μ-messbaren Funktionen $f_n : X \to [0,\infty]$
und $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$.

Dann ist f messbar und
$$\liminf \int_X f_n \, d\mu < \infty \Rightarrow f \text{ } \mu\text{-intbar und}$$
$$\liminf \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X \liminf f_n \, d\mu.$$

Bew: $\liminf f_n(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} f_n(x) = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\inf_{n\geq k} f_n(x)}$ monoton steigend in k.

Sei $F_k(x) := \inf_{n\geq k} f_n(x)$
$$\{x\in X \mid F_k(x) \geq t\} = \bigcap_{n\geq k} \{x\in X \mid f_n(x) \geq t\} \in \mathcal{A}$$
$\Rightarrow F_k$ messbar.

und $F_k \leq F_{k+1}$ monoton.

V.1.15 Satz monotone Kvg.: $\lim_{k\to\infty} F_k$ μ-integrabel
$F = \lim F_k$ messbar
$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \int F_k \, d\mu < \infty$.

BRUNNEN

$$\liminf \int_X f_n d\mu = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} \int f_n d\mu$$

$$\geq \sup_{k\in\mathbb{N}} \int F_k d\mu = \lim_{k\to\infty} \int F_k d\mu$$

S. monot. Kvg. ⇒ Beh. $\square$

V.1.21 **Satz** (Lebesgues majorisierte Kvg.)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständiger Maßraum,

$f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-int'bar f.ü. n∈ℕ

Falls $|f_n(x)| \leq g(x)$ f.a. $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$

und $f_n(x) \to f(x)$ μ-f.ü.

⇒ $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist μ-int'bar und

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

Bew.: $f_n \to f$ μ-f.ü. und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig

⇒ f messbar.

$f_n^{\pm} \to f^{\pm}$ μ-f.ü., $0 \leq f^{\pm} \leq g$ ⇒ f μ-int'bar

Lemma von Fatou $\Rightarrow$ $\int f^{\pm} d\mu \leq \liminf \int f_n^{\pm} d\mu$

$$\int_X g\,d\mu - \limsup \int_X f_n^{\pm} d\mu = \liminf \int_X (g - f_n^{\pm})\,d\mu$$
$$\geq \int_X (g - f^{\pm})\,d\mu$$

$$\Rightarrow \liminf \int f_n^{\pm} d\mu \geq \int f^{\pm} d\mu \geq \limsup \int f_n^{\pm} d\mu$$

$$\Rightarrow \text{ " = ", } \int f^{\pm} d\mu = \lim \int f_n^{\pm} d\mu$$

$\square$

BRUNNEN

§2 L^p-Theorie

V.2.1 Def.: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollst. Maßraum, $1 \leq p < \infty$.

Dann ist $\tilde{\mathcal{L}}^p(X,\mu) := \{ f : X \to \mathbb{C} \mid f$ ist messbar und $|f|^p$ ist μ-int'bar$\}$.

Für $f \in \tilde{\mathcal{L}}^p(X,\mu)$ dann def.

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

V.2.2 Satz: Sei μ wie oben und σ-finit

(a) $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $f, g \in \tilde{\mathcal{L}}^p(X,\mu) \Rightarrow \lambda f + \mu g \in \tilde{\mathcal{L}}^p(X,\mu)$

und $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (Minkowski-Ungl.)

(b) $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ für μ-fast alle $x \in X$.

(c) $f \in \tilde{\mathcal{L}}^p(X,\mu)$, $g \in \tilde{\mathcal{L}}^q(X,\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\Rightarrow f \cdot g \in \tilde{\mathcal{L}}^1(X,\mu)$ und

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad \text{(Hölder-Ungl.)}$$

BRUNNEN

Bew: (b): siehe I.1.19

(c) Seien $A = \|f\|_p$, $B = \|g\|_q$

und $F = \frac{1}{A}|f|$, $G = \frac{1}{B}|g|$

$$\Rightarrow \int_X |F|^p d\mu = \int_X G^q d\mu = 1.$$

Sei $x \in X$ mit $0 < F(x) < \infty$, $0 < G(x) < \infty$

und finde $s, t \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = e^{\frac{s}{p}}$
$G(x) = e^{\frac{t}{q}}$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\boxed{x \mapsto e^x \text{ konvex}}$

$$\Rightarrow F(x) \cdot G(x) = e^{\frac{s}{p} + \frac{t}{q}} \leq \frac{1}{p} e^s + \frac{1}{q} e^t$$
$$= \frac{1}{p} F(x)^p + \frac{1}{q} G(x)^q$$

$$\Rightarrow F(x) \cdot G(x) \leq \frac{1}{p} F(x)^p + \frac{1}{q} G(x)^q \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow \int_X FG \, d\mu \leq \int_X \frac{1}{p} F^p + \frac{1}{q} G^q = 1$$

$$\Rightarrow \int_X |fg| \, d\mu \leq AB = \|f\|_p \cdot \|g\|_q .$$

BRUNNEN

(55)

(a) $(f+g)^p = f\cdot(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$

Hölder $\Rightarrow \int_X |f|\,|f+g|^{p-1} \le \|f\|_p \cdot \left(\int_X |f+g|^{q(p-1)} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$

$\int_X |g| \quad '' \quad \le \|g\|_p \cdot \quad ''$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow q(p-1) = p$

$\Rightarrow \int_X |f+g|^p d\mu \le (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$

$\Rightarrow \|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$

$\square$

BRUNNEN

V.23 **Korollar + Def.:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollst. Maßraum

$\mathcal{L}^p(X,\mu)$ ist ein Vektorraum

mit Semi-Norm $\|\cdot\|_p$,

d.h. $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$,

$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

$\|f\|_p \geq 0$.

Fehlt Normeigenschaft $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

V.1.19 $\Rightarrow$ $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-f.ü.

Definiere Äquivalenzrelation auf $\mathcal{L}^p(X,\mu)$:

$$f \sim \hat{f} \Leftrightarrow f - \hat{f} = 0 \ \mu\text{-f.ü.}$$

Sei $L^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mu)/\sim$

Es gilt: a) $L^p(X,\mu)$ ist ein VR,

b) $\int_X [f] \, d\mu := \int_X f \, d\mu$ ist wohldef.

c) $\|[f]\|_p = \|f\|_p$ ist eine Norm auf $L^p(X,\mu)$

Beweis: Übung.

(IV.2.4) **Satz** $L^p(X,\mu)$ ist ein vollständiger, normierter Raum.

Beweis: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ C.F. bzgl. $\|\cdot\|_p$ in $\tilde{\mathcal{L}}^p(X,\mu)$.

OBdA gilt $\|f_{n+1}-f_n\| \le \frac{1}{2^n}$ $\forall n$.
Andernfalls wählen wir eine entsprechende Teilfolge.

Sei $g_n = f_n - \sum_{i=n}^{\infty} |f_{i+1}-f_i|$

$h_n = f_n + \sum_{i=n}^{\infty} |f_{i+1}-f_i|$

$\Rightarrow g_n, h_n : X \to \underbrace{\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}}_{=\overline{\mathbb{R}}}$ messbar

$\cancel{\|g_n\|_p \le \|f_n\|_p + \|\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i}\|}$

$\cancel{\frac{1}{2^{n-1}}}$

$g_n \le f_n \le h_n$

$g_n \uparrow g$ $\Leftarrow$ $g_n \le g_{n+1}$, da $g_{n+1}-g_n = f_{n+1}-f_n + |f_{n+1}-f_n| \ge 0$.

$h_n \downarrow h$ $\quad h_n \ge h_{n+1}$ analog

$\Rightarrow |g_n|^p \le |h_n|^p$, $\quad \|h_1\|_p \le \|f_1\| + \sum_{i=1}^{\infty} \|f_{i+1}-f_i\|$

$\le \|f_1\| + 1$

$\Rightarrow$ Lebesgue-majo. Konv. anwendbar

$\Rightarrow |g_n|^p \to |g|^p$ int'bar, $|h_n|^p \to |h|^p$ int'bar.

BRUNNEN

$g_n \le g \le h \le h_n$.

$\|h_n - g_n\|_p \le 2 \sum_{i=n}^{\infty} \|f_{i+1} - f_i\|_p \le 2^{2-n} \to 0$.

$\Rightarrow \quad g = h \quad \mu$-f.ü.

$\Rightarrow \quad [g] = [h]$ in $L^p(X,\mu)$

$\Rightarrow \quad [f_n] \to [g] = [h]$ in $L^p(X,\mu)$. $\square$

ISKUNNEN

§3. Anwendungen

IV 3.1 **Satz:** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zushgd.,
$t_0 \in U$, $f: \mathbb{R}^m \times U \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion mit

a) $t \mapsto f(x,t)$ ist für λ^m-fast alle $x \in \mathbb{R}^m$
in t_0 stetig.

b) es existiere ein $F: \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ Leb.-intb.
s.d. $|f(x,t)| \leq F(x)$ für λ-fast alle $x \in \mathbb{R}^m$
und alle $t \in U$.

Dann gilt:

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,t)\, d\lambda^m(x)$$

ist stetig in t_0.

Beweis: $F(x)$ ist L.-intbare Majorante für $f(\cdot,t)$

$\Rightarrow \forall t \in U$: $f(\cdot,t)$ ist L.-intbar

$\Rightarrow t \mapsto g(t)$ ist wohldef.

BRUNNEN

Sei $t_k \to t_0$ und

$f_k(x) := f(t_k, x)$.

a) $\Rightarrow$ Für λ-fast alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt: $f_k(x) \to f(x) := f(x, t_0)$

b) $\Rightarrow$ " " " und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $|f_k(x)| \leq F(x)$.

$\Rightarrow$ Lebesgues majorisierte Konv. anwendbar und

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_k(x)\, d\lambda^m(x) = \lim_{k\to\infty} g(t_k) \overset{?}{=}$$

$$\| $$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\, d\lambda^m(x) = g(t_0)$$

$\Rightarrow$ g stetig in t_0. $\square$

BRUNNEN

V.3.2 **Satz** Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall.

$f: \mathbb{R}^m \times I \to \overline{\mathbb{R}}$ Funktion mit
$(x,t) \mapsto f(x,t)$

a) $\forall t \in I$: $x \mapsto f(x,t)$ ist $\mathcal{L}$-int'bar

b) F.f.a. $x \in \mathbb{R}^m$: $t \mapsto f(x,t)$ ist endlich und stetig diff'bar

c) ex. $F: \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{L}$-int'bar

so d. f.a. $t \in I$: $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le F(x)$ f.ü. auf $\mathbb{R}^m$

Dann ist $g(t) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,t)\, d\lambda^m(x)$ diff'bar auf I

mit $g'(t) = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\lambda^m(x)$.

Bew: Übung.

BRUNNEN

V.33 Bem.

Sei $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ L-int'bar

$\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$: $t \mapsto e^{ixt} \cdot f(t)$ ebenfalls L-int'bar

$\Rightarrow$ $\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ixt} \, d\lambda^1(t)$ ist wohldef.

V.3.1 $\Rightarrow$ $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist stetig.

$\hat{f}$ heißt die Fourier-Transformierte von f.

BRUNNEN