IV.3.11 Def:

Seien $(X_1, \mathcal{A}_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2)$
Räume mit σ-Algebren und $X = X_1 \times X_2$

Sei $\mathcal{A} = \sigma(\{A_1 \times A_2 \mid A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1,2\})$
$=: \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

Dies ist die sogenannte Produkt-σ-Algebra.

Seien $\mu_i : \mathcal{A}_i \to [0, \infty]$, $i = 1,2$ Maße.

Thm: Dann existiert genau ein Maß
$\mu_1 \otimes \mu_2 := \mu : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \to [0, \infty]$
mit $\mu(A_1 \times A_2) = \mu(A_1) \cdot \mu(A_2)$
f.a. $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1,2$

Dies ist das sogenannte Produktmaß

Beweis später

IV.3.12 Korollar: $\mathcal{B}_n(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^i) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^j)$
und $\lambda_n = \lambda_i \otimes \lambda_j$
f.a. $i + j = n$.

BRUNNEN

V. Lebesgue-Integral

§ V.1 Messbare Funktionen

V.1.1 Def: Seien $(X_1,\mathcal{A}_1)$, $(X_2,\mathcal{A}_2)$ zwei Räume mit σ-Algebren. Dann heißt eine Abb.

$$f: X_1 \to X_2 \quad (\mathcal{A}_1\text{-}\mathcal{A}_2\text{-})\text{ messbar}$$

$$:\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A}_2 \text{ ist } f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1.$$

$f: (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}^k$ heißt messbar, wenn f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar ist.

V.1.2 Lemma: $f: (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ ist messbar

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}: \Omega_f(t) = \{x \in X \mid f(x) > t\} \in \mathcal{A}$$

Beweis: $\mathcal{B}$ wird von den (t,∞), $t\in\mathbb{R}$ erzeugt,

also $\mathcal{B} = \sigma(\{(t,\infty) \mid t \in \mathbb{R}\})$

$f^{-1}: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(X)$ ist verträglich mit Komplementbildung und beliebigen Vereinigungen

$$\Rightarrow \sigma(\{f^{-1}(t,\infty) \mid t\in\mathbb{R}\}) = f^{-1}(\sigma(\{(t,\infty) \mid t \in \mathbb{R}\})) = f^{-1}(\mathcal{B})$$

$\subseteq \mathcal{A}$ nach Voraus. $\Rightarrow$ Beh. $\square$

V.1.3

Bem.: $f: X \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow f$ ist $\mathcal{B}(\mathcal{T})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar,

denn $S_f(t)$ ist f.a. $t \in \mathbb{R}$ offen.

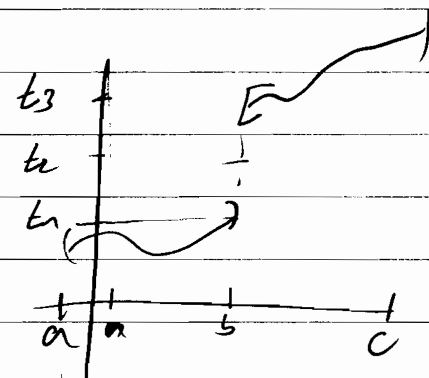
V.1.4

Def.: Für X topol. Raum

$f: X \to \mathbb{R}$ heißt

unterhalb stetig $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $S_f(t)$ ist offen $\forall t \in \mathbb{R}$

oberhalb stetig $\Leftrightarrow$ $\{x \in X \mid f(x) < t\}$ ist offen $\forall t \in \mathbb{R}$



$\{f(x) < t_1\} = (a, b)$

$\{f(x) < t_2\} = (a, b)$ $\quad$ f ist oberhalb stetig

$\{f(x) < t_3\} = (a, b)$

$\{f(x) > t_2\} = [b, c)$ $\quad$ f ist nicht unterhalb stetig

f ist stetig $\Leftrightarrow$ f ist unter- und oberhalb stetig.

BRUNNEN

(IV.1.5) **Def.:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum

Sei $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und

$$\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \{ A \cup \{+\infty\} \mid A \in \mathcal{B} \}$$

Sei $f: X \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$-messbar

Betrachte $F_f(t) := \mu(S_f(t)) = \mu(\{x \in X \mid f(x) > t\})$

Für $t < t' \Rightarrow S_f(t') \subseteq S_f(t)$

$$\Rightarrow F_f : [0,\infty) \to [0,\infty] \text{ ist monoton fallend.}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty F_f(t)\,dt = \lim_{a \to \infty} \int_0^a F_f(t)\,dt$$

ist als uneigentliches Riemannsches Integral wohldef.

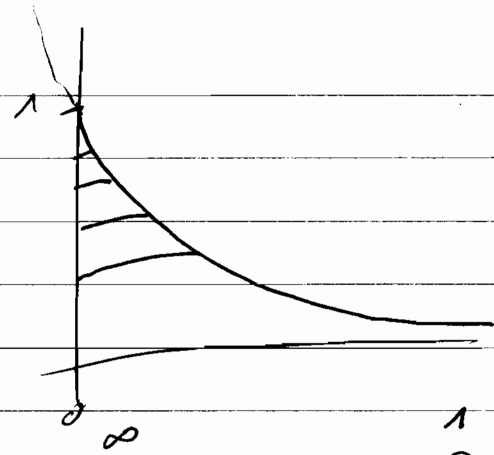
(IV.1.6) **Bsp.** $f: [0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = e^{-x}$

$$S_f(t) = \{ x \in [0,\infty) \mid e^{-x} > t \}$$

$$= \begin{cases} \emptyset, & t > 1 \\ \{0\}, & t = 1 \\ [0, -\log t), & 0 < t < 1 \\ [0,\infty), & t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_f(t) = \lambda^1(S_f(t)) = \begin{cases} 0, & t \geq 1 \\ -\log t, & 0 < t < 1 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

BRUNNEN



$$\int_0^\infty F_f(t)\,dt = \int_0^1 (-\log t)\,dt \qquad t = e^u,\quad dt = e^u\,du$$

$$= \int_{-\infty}^0 (-u)\,e^u\,du$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^u\,du - u e^u \Big|_{-\infty}^0 = e^u \Big|_{-\infty}^0 = 1.$$

V.1.7 <u>Def.</u> Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $f : X \to [0,\infty)$ $\mathcal{A}$-messbar.

Dann def. das <u>μ-Integral</u>

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) := \int_X f(x)\,d\mu(x)$$

$$:= \int_0^\infty F_f(t)\,dt = \int_0^\infty \mu(\{x \in X \mid f(x) > t\})\,dt$$

f heißt <u>μ-integrierbar</u> $:\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\int_X f\,d\mu < \infty$.

In dem Fall von $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \lambda^n)$ sprechen wir von Lebesgue-Integral.

Falls $f: X \to [0,\infty)$ μ-messbar und $A \in \mathcal{A}$

so def. $\int_A f \, d\mu := \int_X 1_A \cdot f \, d\mu$

Hier ist $S_{1_A f}(t) = \{x \in X \mid (1_A \cdot f)(x) > t\}$

$= \{x \in A \mid f(x) > t\} = A \cap S_f(t) \in \mathcal{A} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(V.18) Satz Seien $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$-messbar.

Dann sind auch

ⓐ $f+g$: $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$-messbar

ⓑ $\max(f,g)$ "

ⓒ $f \cdot g$ $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$-messbar, falls auf ganz X definiert

Beweis: $\{f<g\} = \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$

Bh. $\{f<g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{f<q\} \cap \{q<g\}$

Bew. „$\supseteq$": klar

Sei $f(x) < g(x) \Rightarrow$ ex. $q \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) < q < g(x)$

$\Rightarrow$ „$\subseteq$"

$\{f<q\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f \leq q - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{A}$, da $X \setminus \{f > q - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{A}$.

analog $\{q<g\}$.

$\Rightarrow \{f < g\} \in \mathcal{A}$

Offenbar gilt $a + bf$ messbar f.a. $a \in \mathbb{R}, b \geq 0$

und f.a. $b < 0$ sofern $f(X) \subset \mathbb{R}$

$\Rightarrow g \pm f$ messbar. (Übung)

Rest Übung. $\square$

IV.1.9 Def.: Sei $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$-messbar.

Dann sind auch

$$f^+ = \max(f, 0)$$

$$\text{und } f^- = -\min(f, 0) : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar}$$

und $f = f^+ - f^-$

f heißt dann μ-integrabel $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

f^+ und f^- sind μ-integrabel

und dann $\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$.

BRUNNEN

Notation

$$\tilde{\mathcal{L}}^1(X,\mu) := \{ f : X \to \mathbb{R} \ \mathcal{A}\text{-}\mathcal{B}\text{-messbar} \mid f \ \mu\text{-integrabel} \}$$

V.1.10 **Bsp.:** Für $(X,\mathcal{A},\mu)$ Maßraum,

$A \in \mathcal{A}$ und $f = 1_A$

$$\Rightarrow \ S_f(t) = \mu(\{x \in X \mid 1_A(x) > t\})$$
$$= \begin{cases} A, & 0 \le t < 1 \\ \phi, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ F_f(t) = \begin{cases} \mu(A), & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \int_X 1_A \, d\mu = \int_0^1 \mu(A) \, dt = \mu(A).$$

V.1.11 **Theorem:** $\tilde{\mathcal{L}}^1(X,\mu)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und
$$\int_X \cdot \, d\mu : \tilde{\mathcal{L}}^1(X,\mu) \to \mathbb{R}$$
ist $\mathbb{R}$-linear

(IV.1.12)

Def.: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.

Dann heißt $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine

<u>Elementarfunktion</u>

$\iff$ $f(X) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ist eine endliche Menge

Lemma: $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist Elementarfunktion

$\iff$ ex. $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$

und $c_1, \dots, c_k \in \overline{\mathbb{R}}$

mit $f = c_1 \cdot \mathbf{1}_{A_1} + \dots + c_k \cdot \mathbf{1}_{A_k}$

Bew.: „$\Leftarrow$" klar

„$\Rightarrow$" Sei $f(X) = \{a_1, \dots, a_k\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_k$

und def. $A_1 = \{x \in X \mid a_1 \leq f(x) < a_2\}$

$\vdots$

$A_k = \{x \in X \mid a_k \leq f(x)\}$

$\Rightarrow$ $f = a_1 \cdot \mathbf{1}_{A_1} + \dots + a_k \cdot \mathbf{1}_{A_k}$

$X = A_1 \cup \dots \cup A_k$ disjunkte Vereinigung.

$\square$

BRUNNEN

IV.1.13 **Satz** Sei $f: X \to [0,\infty]$ μ-integrabel

Dann ex. $\forall N \in \mathbb{N}$

eine elementare Funktion $f_N: X \to [0,\infty)$

mit f_N μ-integrabel und

$$\left| \int_X f \, d\mu - \int_X f_N \, d\mu \right| \leq \frac{1}{N}$$

Beweis: Sei

$$f_n = \sum_{k=0}^{n^2-1} \frac{k}{n} \cdot 1_{\{\frac{k}{n} \leq f < \frac{k+1}{n}\}} + n \cdot 1_{\{f \geq n\}}$$

Es gilt: $f_n(x) \leq f(x)$ f.a. $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\{f_n > t\} \subset \{f > t\}$ f.a. $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ (1)
$$\boxed{\begin{array}{ccc} \int_0^\infty \mu(\{f_n > t\})\, dt & < & \int_0^\infty \mu(\{f > t\})\, dt \\ \| & & \| \\ \int_X f_n \, d\mu & & \int_X f \, d\mu \end{array} \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}}$$

$\Rightarrow$ f_n μ-integrabel f.a. $n \in \mathbb{N}$.

Sei $1 \le k \le n^2$ und $\frac{k}{n} \le t < \frac{k+1}{n}$

Dann gilt: $f(x) > t \Rightarrow f(x) > \frac{k}{n}$

$$\Rightarrow f_n(x) \ge \frac{k}{n} > t - \frac{1}{n}$$

Also $\mu(f(x)>t) \le \mu(f_n(x) > t - \frac{1}{n})$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{n}}^{n+\frac{1}{n}} \mu(f(x)>t)\,dt \le \int_{\frac{1}{n}}^{n+\frac{1}{n}} \mu(f_n(x) > t - \tfrac{1}{n})\,dt$$

$$= \int_0^n \mu(f_n(x)>t)\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_0^\infty \mu(f_n(x)>t)\,dt$$

da $\mu(f_n(x)>n)=0$

$$(2)\quad \Rightarrow \int_0^\infty \mu(f(x)>t)\,dt \le \int_0^\infty \mu(f_n(x)>t)\,dt + \int_0^{\frac{1}{n}} \mu(f(x)>t)\,dt + \int_{n+\frac{1}{n}}^\infty \mu(f(x)>t)\,dt.$$

Also (1) + (2) $\Rightarrow$ $\left| \int_X f\,d\mu - \int_X f_n\,d\mu \right|$

$$\le \underbrace{\int_0^{\frac{1}{n}} \mu(f(x)>t)\,dt}_{= A_n} + \underbrace{\int_{n+\frac{1}{n}}^\infty \mu(f(x)>t)\,dt}_{= B_n}.$$

ISKUNNEN

Voraussetzung: f ist μ-integrabel, d.h.

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R} \mu(f(x)>t)\,dt \text{ ex. } \forall R>0$$

und $$\lim_{R\to\infty} \int_{\varepsilon}^{R} \mu(f(x)>t)\,dt \text{ ex. } \forall \varepsilon>0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = 0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} B_n = 0$$

$\Rightarrow$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$ ex. elementare μ-integrable Funktion f_n mit $\left|\int f\,d\mu - \int f_n\,d\mu\right| \leq \frac{1}{n}$

$\boxtimes$

Beweis von Theorem V.1.11:

Schritt 1: Für $f: X\to[0,\infty]$ μ-integrabel und $\lambda>0$.

Dann ist auch λf μ-integrabel und

$$\int_X \lambda f\,d\mu = \lambda \int_X f\,d\mu$$

BRUNNEN

Bew.: $\{x \in X \mid \lambda f(x) > t\} = \{x \in X \mid f(x) > \frac{t}{\lambda}\}$

$$\int_X \lambda f \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\lambda f(x) > t) \, dt$$
$$= \int_0^\infty \mu(f(x) > \tfrac{t}{\lambda}) \, dt$$
$$\overset{\text{Subst}}{=} \int_0^\infty \mu(f(x) > s) \lambda \, ds = \lambda \int_0^\infty \mu(f(x) > s) \, ds$$
$$= \lambda \int_X f \, d\mu .$$

Analog für $f : X \to [0,\infty)$ μ-integrabel und $\lambda < 0$

sowie $f : X \to (-\infty, 0]$ " ...

Schritt 2: Seien $f, g \geq 0$ Elementarfunktionen

und μ-integrabel

Dann ist auch $f + g$ μ-integrabel

Beweis: Betrachte $f = a_1 1_{A_1} + \ldots + a_k 1_{A_k}$

$A_i \cap A_j = \emptyset$, $a_1 < \ldots < a_k$

BRUNNEN

$$\Rightarrow \quad \{f(x) > t\} = \begin{cases} \emptyset, & t \geq a_k \\ A_k, & a_{k-1} \leq t < a_k \\ A_{k-1} \cup A_k, & a_{k-2} \leq t < a_{k-1} \\ \vdots & \\ A_1 \cup \ldots \cup A_k, & t < a_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 \cdot (\mu(A_1) + \ldots + \mu(A_k)) + (a_2 - a_1) \cdot (\mu(A_2) + \ldots + \mu(A_k))$$

$$+ \ldots + (a_k - a_{k-1}) \mu(A_k)$$

$$= a_1 \cdot \mu(A_1) + a_2 \mu(A_2) + \ldots + a_k \mu(A_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_X a_i \cdot 1_{A_i} \, d\mu \, .$$

$\Rightarrow$ Beh.

Schritt 3: Seien $f, g : X \to [0, \infty]$ μ-integrabel

Dann ist auch $f + g : X \to [0, \infty]$ μ-integrabel

Beweis: $f(x) + g(x) > t \Rightarrow f(x) > \frac{t}{2}$ oder $g(x) > \frac{t}{2}$

$$\Rightarrow \quad \{f + g > t\} \subset \{2f > t\} \cup \{2g > t\}$$

$$\Rightarrow \quad \int_X (f+g) \, d\mu \leq 2 \int_X f \, d\mu + 2 \int_X g \, d\mu < \infty \, .$$

$\square$

Schritt 4: Seien $f, g: X \to [0,\infty]$ μ-integrabel.

Dann ex. $C > 0$ sodaß $\forall N \in \mathbb{N}$

$\exists f_N, g_N : X \to [0,\infty)$ μ-integrable Elementarfkt.

s.d. $$\left| \int_X f \, d\mu - \int_X f_N \, d\mu \right| \leq \frac{C}{N}$$

$$\left| \int_X g \, d\mu - \int_X g_N \, d\mu \right| \leq \frac{C}{N}$$

und $$\left| \int_X (g+f) \, d\mu - \int_X (g_N + f_N) \, d\mu \right| \leq \frac{C}{N}$$

Bew: Übung, siehe V.1.13.

Schritt 5: Kombiniere Schritt 2+4

$\Rightarrow$ Beh.

Schritt 1+3 $\Rightarrow$ $\tilde{\mathcal{L}}^1(X,\mu)$ ist $\mathbb{R}$-VR.

$\square$

BRUNNEN

V.1.14 **Def.:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.

Eine Eigenschaft P für Punkte $x \in X$ hält fast überall oder für fast alle $x \in X$ erfüllt (bzgl. μ)

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ P ist messbar, also $\{x \in X \mid x \text{ erfüllt } P\} \in \mathcal{A}$

und $\mu(\{x \in X \mid x \text{ erfüllt } P \text{ nicht}\}) = 0$.

Bspl Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von μ-integrablen Funktionen $f_n : X \to [0, \infty]$ mit

$f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ für fast alle $x \in X$.

Dann ist f.f.a. $x \in X$: $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ monoton in $[0, \infty]$

$\Rightarrow$ $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ ist für fast alle $x \in X$ def.

Setze $f(x) = 0$ für die $x \in X$, wo $\lim f_n(x)$ nicht def.

Sei nun $I_n = \int_X f_n \, d\mu \in [0, \infty)$

Da $\mu(f_{n+1} < f_n) = 0$

$\Rightarrow$ $I_n \leq I_{n+1}$ f.a. $n \in \mathbb{N}$.

IV.1.15 Satz über monotone Konvergenz

Seien (f_n), (I_n) wie oben, μ vollständig.
Dann ist $f: X \to [0,\infty]$ wieder messbar
und $I := \lim_{n\to\infty} I_n < \infty \iff f$ ist μ-integrabel.
In diesem Fall gilt
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n \, d\mu\right) = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu$$

<u>Beweis:</u> Für $X_n(t) = S_{f_n}(t) = \{x \in X \mid f_n(x) > t\}$

$f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ f.f.a. x

$\Rightarrow X_n(t) \subset X_{n+1}(t) \cup$ Nullmenge

$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n(t) = \{x \in X \mid f(x) > t\} \cup$ Nullmenge

$\Rightarrow f$ messbar und

$\mu(X(t)) = \lim_{n\to\infty} \mu(X_n(t))$ (siehe IV.1.12 ⓒ)

und $\mu(X_n(t)) \leq \mu(X_{n+1}(t))$ $\forall t$

Für $F(t) = \mu(X(t))$, $F_n(t) = \mu(X_n(t))$

$\Rightarrow$ F_n ist monoton steigende Folge von monotonen Fkt.

mit $F(t) = \lim F_n(t)$

$\Rightarrow \int_0^\infty F(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty F_n(t)\,dt$ für Riem.-Integral. $\square$