IV.1.10 **Beispiele**

1. Sei X beliebig, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, $A \in \mathcal{A}$

dann def.

$$\mu(A) := \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ unendlich} \end{cases}$$

μ ist ein Maß, das sogenannte Zählmaß

2. $\mathcal{A}$ wie in 1. dann

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } |A| < \infty \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ μ ist zwar additiv, aber nicht σ-additiv.

3. Sei X überabzählbar, $\mathcal{A} = \{A \subset X \mid A \text{ abz. oder } X \setminus A \text{ abz.}\}$

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & A \text{ abzählbar} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ μ ist Maß, Beweis Übung

BRUNNEN

(4) Sei X beliebig, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, $x \in X$ fest.

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

$\Rightarrow$ δ_x ist ein Maß, das sog. Dirac-Maß

allgemein: Sei $A \in \mathcal{A}$ fest.

Dann def. für $B \in \mathcal{A}$

$$\mu(B) = \delta_A(B) = \begin{cases} 1, & A \cap B \neq \emptyset \\ 0, & A \cap B = \emptyset \end{cases}$$

IV.1.11 Def.: Sei X gegeben, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-Algebra und $\mu: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß. Dann heißt

(a) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum

(b) μ endlich $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mu(A) < \infty$ $\forall A \in \mathcal{A}$
$\Leftrightarrow \mu(X) < \infty$

(c) μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\Leftrightarrow$ $\mu(X) = 1$

(d) μ σ-endlich $\Leftrightarrow$ ex. $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit
$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ und $\mu(A_k) < \infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

(e) $A \in \mathcal{A}$ heißt Nullmenge (bzgl. μ) $\Leftrightarrow \mu(A) = 0$

(f) μ heißt vollständig $\Leftrightarrow \forall A$ Nullmenge gilt
$B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0$.

IV.1.12 Satz: Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gilt,

(a) $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

(b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

(c) $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B, \mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(d) $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$

(e) $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, $A_k \subseteq A_{k+1}$ f.a. $k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k)$ (Stetigkeit von unten)

d.h. Limes ex. in $[0, \infty]$
und ist gleich ...

(f) $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, $A_k \supseteq A_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ und $\mu(A_1) < \infty$
$\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k)$ (Stetigkeit von oben)

BRUNNEN

(10)

Beweis von (a) - (d): einfache Übung.

(e): Definiere $B_1 := A_1$, $B_i := A_i \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \right)$, $i \geq 2$.

$\Rightarrow B_k = A_k \setminus A_{k-1}$, $A_k = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ disj. Vereinigung

$\Rightarrow \mu(A_k) = \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i) \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \underset{\text{Axiom}}{=} \mu\left(\bigcup_i B_i\right) = \mu\left(\bigcup_i A_i\right)$

(f) Sei $B_i := A_1 \setminus A_i \Rightarrow B_i \subseteq B_{i+1}$ $\forall i$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, $\mu(A_i) < \infty$

$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \overset{(c)}{=} \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$

$\| (e)$

$\lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = \mu(A_1) - \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) \Rightarrow$ Beh. $\square$

IV.1.13 **Lemma**: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und

$\mathcal{N} = \{ A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) = 0 \}$.

Dann ist $\bar{\mathcal{A}} = \{ A \cup B \mid A \in \mathcal{A}, B \subseteq C$ f.e. $C \in \mathcal{N} \}$ eine σ-Algebra

und es existiert ein eindeutiges Maß $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ mit $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.

Beweis:

Sei $\bar{A} \in \mathcal{A}$ also $\bar{A} = A \cup B$, $B \subseteq C$, $C \in \mathcal{N}$, $A \in \mathcal{A}$

$C \setminus B \subset C$

$$X \setminus \bar{A} = (X \setminus A) \setminus B = \underbrace{(X \setminus A \cup C)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{C \setminus B}_{\subset C \in \mathcal{N}}$$

Rest einfach $\boxtimes$

§2. Existenz von Maßen

Problem: Gesucht sei ein Maß

μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ so daß

f.a. $R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$

$\mu(R) = |R| = \mathrm{vol}(R)$

und $\mu(A+x) = \mu(A)$ (Translationsinvarianz)

f.a. $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

$A + x = \{v + x \mid v \in A\}$

BRUNNEN

IV.2.1 Satz: Ein solches Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ existiert nicht.

Beweis

Auswahlaxiom: Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie von nicht-leeren Mengen.

Dann ist

$$\prod_{i\in I} X_i = \{ f: I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid f(i) \in X_i \text{ f.a. } i\in I \}$$

nicht leer.

Definiere Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$

$$x \sim y :\Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$$

Sei $I = \{ [x] \mid x\in\mathbb{R} \} = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$

Gemäß Auswahlaxiom existiert $f: I \to \mathbb{R}$ mit $f([x]) \in [x]$.

Sei $D = f(I) \subset \mathbb{R}$.

Schritt 1: OBdA $D \subset [0,1]$

Bew.: Haben $[x] \cap [0,1] \neq \emptyset$ f.a. $x \in \mathbb{R}$

Auswahlaxiom $\Rightarrow$ ex. $f \in \prod_{[x] \in I} [x] \cap [0,1]$

Schritt 2: $\mathbb{Q}$ abzählbar $\Rightarrow \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ abz.

Sei $\mathbb{Q} \cap [-1,1] = \{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

Beh.: $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (D+q_i) \subset [-1,2]$

Bew: Sei $y \in [0,1] \Rightarrow \exists!\, x \in D$ mit $x \sim y$

$\Rightarrow y-x \in \mathbb{Q}$, $x,y \in [0,1] \Rightarrow y-x \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$

$\Rightarrow y = x+q_i$ f.e. $i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow y \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (D+q_i)$ ✓

Schritt 3: $q_i \neq q_j \Rightarrow D+q_i \cap D+q_j = \emptyset$

Bew: $x \in D+q_i \cap D+q_j$

$\Rightarrow x = y_1+q_i = y_2+q_j$

$\Rightarrow y_1 - y_2 \in \mathbb{Q}$, D enthält aus jedem $[x]$ genau ein El.

$\Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow q_i = q_j$

Schritt 4: Sei $c = \mu(D) \in [0,\infty]$

$\mu(D+q_i) = \mu(D) = c \quad \forall q_i$

$1 = \mu([0,1]) \overset{(2)}{\leq} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} D+q_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} c$

$\bigcup D+q_i \subset [-1,2] \Rightarrow \boxed{1 \leq \sum_{i=1}^{\infty} c \leq 3}$ ↯ $\square$

Antwort: μ ist nicht auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ definierbar, wenn Translationsinvarianz gelten soll.

IV.2.2 Def.: Eine Funktion

$$\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$$

heißt **äußeres Maß** $:\Leftrightarrow$

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ gilt: $\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$

(iii) $A, B \subset X,\ A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Sei μ^* ein äußeres Maß auf X.

Dann heißt $A \subset X$ μ^*-messbar

$$:\Leftrightarrow \boxed{\forall E \subset X: \mu^*(E) = \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E \cap X\setminus A)} \quad (*)$$

BRUNNEN

IV.23 Satz (Carathéodory):

Sei μ^* äußeres Maß auf X.

Dann ist $\mathcal{A} := \{ A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar} \}$

eine σ-Algebra und $\mu = \mu^*|\mathcal{A}$ ist ein

vollständiges Maß auf $\mathcal{A}$.