IV.23 Satz (Carathéodory):

Sei μ^* äußeres Maß auf X.

Dann ist $\mathcal{A} := \{ A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar} \}$

eine σ-Algebra und $\mu = \mu^*|\mathcal{A}$ ist ein

vollständiges Maß auf $\mathcal{A}$.

Beweis: Schritt 1: $\mathcal{A}$ ist eine Algebra

Bew: $\mu^*(\emptyset) = 0 \Rightarrow \mu^*(E) = \mu^*(E \cap \emptyset) + \mu^*(E \cap X\setminus\emptyset) \; \forall E$

$\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}$

$A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$ direkt aus Def. von μ^*-messbar

Seien $A, B \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow \mu^*(E \cap A) = \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*((E \cap A) \cap X\setminus B)$, da $B \in \mathcal{A}$

$\mu^*(E \cap X\setminus A) = \mu^*((E \cap X\setminus A) \cap B) + \mu^*((E \cap X\setminus A) \cap X\setminus B)$, "

$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap X\setminus A)$

$= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap X\setminus B)$

$+ \mu^*(E \cap X\setminus A \cap B) + \mu^*(E \cap X\setminus A \cap X\setminus B)$

$\geq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*((E \cap A \cap X\setminus B) \cup (E \cap X\setminus A \cap B) \cup (E \cap X\setminus A \cap X\setminus B))$

$= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap (X\setminus A \cup X\setminus B))$

$= \mu^*(E \cap (A \cap B)) + \mu^*(E \cap X\setminus(A \cap B)) \geq \mu^*(E)$

$\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$.

BRUNNEN

<u>Schritt 2:</u> $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt gilt

$$\mu^*(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu^*(A_1) + \ldots + \mu^*(A_n)$$

<u>Bew:</u> Induktion nach n

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap X \setminus A_1)$$
$$= \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

<u>Schritt 3:</u> $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt

$$\Rightarrow \forall E \subset X: \mu^*(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*\left(E \cap \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus A_i\right)$$

<u>Bew:</u> Induktion nach n.

$$A_{n+1} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu^*\left(E \cap \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus A_i\right) = \mu^*\Big(\underbrace{E \cap \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus A_i \cap A_{n+1}}_{= E \cap A_{n+1}}\Big)$$
$$+ \mu^*\left(E \cap \bigcap_{i=1}^{n+1} X \setminus A_i\right)$$

<u>Also</u>
$$\mu^*(E) \overset{\text{Ind.-Ann.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*\left(E \cap \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus A_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n+1} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*\left(E \cap \bigcap_{i=1}^{n+1} X \setminus A_i\right)$$

BRUNNEN

Schritt 4: $\forall (A_n) \subset \mathcal{A}$ paarweise disjunkt gilt

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$$

Bew: $\mu^*(E) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Schritt 3}}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E\cap A_i) + \mu^*\Big(E\cap \bigcap_{i=1}^{n} X\setminus A_i\Big)$

$$\underset{\substack{\text{Axiom (iii)} \\ \text{Bdg}}}{\geq} \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E\cap A_i) + \mu^*\Big(E\cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X\setminus A_n\Big) \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \mu^*(E) \geq \mu^*\Big(E\cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) + \mu^*\Big(E\cap X\setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$$
$$\geq \mu^*(E)$$

$\Rightarrow$ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ und für $E = \bigcup A_n$ folgt Beh.

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ ist σ-Algebra und μ^* ist ein Maß auf $\mathcal{A}$.

Schritt 5: $(X, \mathcal{A}, \mu^*|_{\mathcal{A}})$ ist vollständig.

Für $A\in\mathcal{A}$ mit $\mu^*(A)=0$, $B\subset A \underset{\text{(iii)}}{\Rightarrow} \mu^*(B)=0$

Für $E\subset X$: $\mu^*(E) \leq \mu^*(E\cap B) + \mu^*(X\setminus B\cap E)$
$= \mu^*(E\cap X\setminus B) \leq \mu^*(E)$

$\Rightarrow$ überall „=" $\Rightarrow B\in\mathcal{A}$.

$\square$

BRUNNEN

IV. 24) Def. + Satz

Ein Teilmengensystem $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{P}(X)$ hat die Folgenüberdeckungseigenschaft (FÜE)

$:\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

2) $\forall A \subset X \; \exists (A_n) \subset \mathcal{F}$ mit $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ mit FÜE und $\lambda : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ mit $\lambda(\emptyset) = 0$

dann ist $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ mit

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) \;\middle|\; (E_n) \subset \mathcal{F},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\}$$

ein äußeres Maß auf X.

Beweis 1) $\mu^*(\emptyset) = 0$, klar mit $E_n = \emptyset$

2) Sei $A \subset B \subset X$.

Falls $(E_n) \subset \mathcal{F}$ mit $B \subset \bigcup E_n$

$\Rightarrow A \subset \bigcup E_n$ und $\mu^*(A) \leq \sum_n \lambda(E_n)$

$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. $\Rightarrow$ (Tii)

BRUNNEN

3) Seien $A_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$

und $\forall n \in \mathbb{N}: A_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{n,m}$, $(E_{n,m}) \subset \mathcal{F}$

$\Rightarrow \bigcup_n A_n \subset \bigcup_{n,m} E_{n,m}$

$\Rightarrow \mu^*(\bigcup A_n) \leq \sum_{n,m} \lambda(E_{n,m}) = \sum_n \left(\sum_m \lambda(E_{n,m}) \right)$

$\Rightarrow \mu^*(\bigcup A_n) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$. ☐

(IV.2.5) Lemma: Sei $\mathcal{A}$ Algebra in X und $\mu: \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ein Prämaß. Sei μ^* das durch μ erzeugte äußere Maß. Dann gilt:

(i) $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$

(ii) Jedes $A \in \mathcal{A}$ ist μ^*-messbar.

Beweis Übung

BRUNNEN

IV.2.6 **Satz:** Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra auf X, μ ein Prämaß auf $\mathcal{A}$. Dann gilt

(a) $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ ist ein Maß auf $\sigma(\mathcal{A})$ mit $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$.

(b) Sei ν ein Maß auf $\sigma(\mathcal{A})$ mit $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$.

Dann gilt $\nu(A) \leq \mu(A)$ f.a. $A \in \sigma(\mathcal{A})$

und $\nu(A) = \mu(A)$ f.a. $A \in \sigma(\mathcal{A})$ mit $\mu^*(A) < \infty$.

(c) Falls ex. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $\mu(A_n) < \infty$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

und $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Dann ist $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ das eindeutige Maß auf $\sigma(\mathcal{A})$

mit $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$.

Bew.: (a) IV.2.3 $\Rightarrow$ $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ ist ein Maß auf $\{A\ \mu^*\text{-messbar}\}$

IV.2.5 $\Rightarrow$ $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$.

IV.2.5 $\Rightarrow$ $\mathcal{A} \subset \{A\ \mu^*\text{-messbar}\}$ $\Rightarrow$ $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\ ''\ \}$

$\Rightarrow$ Beh.

BRUNNEN

(b) Sei ν Maß auf $\sigma(\mathcal{A})$ mit $\nu_{|\mathcal{A}} = \mu$

Sei $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $A_n \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow \nu(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$

$\Rightarrow \nu(A) \leq \mu^*(A)$ f.a. $A \in \sigma(\mathcal{A})$

Sei $\mu^*(A) < \infty$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit

$A \subset \bigcup A_n$ und $\sum \mu(A_n) < \mu^*(A) + \varepsilon$.

$\Rightarrow \mu^*(\bigcup A_n) < \mu^*(A) + \varepsilon$

$\Rightarrow \mu^*(\bigcup A_n) = \mu^*(\underbrace{\bigcup A_n \cap A}_{= A}) + \mu^*(\bigcup A_n \setminus A)$

da $\bigcup A_n \in \sigma(\mathcal{A}) \subset \{\mu^*\text{-messbar}\}$

$\Rightarrow \mu^*(\bigcup A_n \setminus A) < \varepsilon$.

$\nu(\bigcup A_n) \underset{\text{Pr. 1.12}}{=} \lim_{n \to \infty} \nu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \underset{\mathcal{A}\text{ Algebra}}{=} \lim_{n \to \infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$

$= \mu^*(\bigcup A_n)$

$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(\bigcup A_n) = \nu(\bigcup A_n) = \nu(A) + \nu(\bigcup A_n \setminus A)$

$\leq \nu(A) + \mu^*(\bigcup A_n \setminus A) \leq \nu(A) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \mu^*(A) = \nu(A)$ $\square$

BRUNNEN

(c) Seien $(A_n) \subset \mathcal{A}$ mit $\mu(A_n) < \infty$ $\forall n$

und $X = \bigcup A_n$, OBdA $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$.

Sei ν Maß auf $\sigma(\mathcal{A})$ mit $\nu_{|\mathcal{A}} = \mu$

$$\mu^*(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \mu^* \text{ Maß auf } \sigma(\mathcal{A})}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A \cap A_n) \underset{\substack{\uparrow \\ (b)}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A \cap A_n) = \nu(A)$$

$\boxtimes$

§ 3. Lebesgue-Maß

IV 3.1 Def: Sei $\mathcal{J}_n := \{ (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \mid a_i < b_i,\ i = 1 \ldots n \}$

$I \in \mathcal{J}_n$ heißt n-dim Intervall

Sei $\mathcal{F}_n := \{ \bigcup_{i=1}^{r} A_i \mid r \in \mathbb{N},\ A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{J}_n \}$

Satz: (a) $I, J \in \mathcal{J}_n \Rightarrow I \cap J \in \mathcal{J}_n$

$J \setminus I \in \mathcal{F}_n$

(b) $\forall A \in \mathcal{F}_n\ \exists B_1, \ldots, B_r \in \mathcal{J}_n$ paarweise disjunkt

mit $A = \bigcup_{i=1}^{r} B_i$

(c) $A, B \in \mathcal{F}_n \Rightarrow A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B \in \mathcal{F}_n$.

Bew: Übung.

BRUNNEN

Bem: $\mathcal{F}_n$ ist keine Algebra,

da $\mathbb{R}^n \notin \mathcal{F}_n$ und $\mathbb{R}^n \setminus B \notin \mathcal{F}_n$ für $B \in \mathcal{I}_n$.

IV 3.2 Satz: $\sigma(\mathcal{I}_n) = \sigma(\mathcal{F}_n) =$ Borel-σ-Algebra von $\mathbb{R}^n$

Bew.: $(a,b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a+\frac{1}{n}, b)$

$\Rightarrow$ jede offene Rechteck-Menge liegt in $\sigma(\mathcal{I}_n)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{T} =$ Topologie von $\mathbb{R}^n \subset \sigma(\mathcal{I}_n)$

$\Rightarrow$ Borel-σ-Algebra $\sigma(\mathcal{T}) \subset \sigma(\mathcal{I}_n)$

Andererseits gilt $[a,b) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (a-\frac{1}{n}, b)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{I}_n \subset \sigma(\mathcal{T}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{I}_n) = \sigma(\mathcal{T})$ $\square$

IV 3.3 Satz: Es ex. Additive Funktion

$\lambda : \mathcal{F}_n \to [0,\infty)$ mit den Eigenschaften

(i) $\lambda(\emptyset) = 0$ und

(ii) $\forall A_1, \dots, A_n$ paarweise disjunkt gilt

$$\lambda(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda(A_\nu),$$

und (iii) $\lambda(I) = |I| = \mathrm{vol}_n(I)$ f.a. $I \in \mathcal{I}_n$

BRUNNEN

IV.3.4 **Satz:** $\lambda: \mathcal{F}_n \to [0,\infty)$ hat die Eigenschaft:

$\forall (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_n$ paarweise disjunkt mit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{F}_n$

gilt: $\lambda\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(A_k)$

IV.3.5 **Theorem:** Es existiert ein eindeutiges Maß λ auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_n$ mit

$\lambda(I) = |I|$ f.a. $I \in \mathcal{I}_n$.

Beweis:

(1) $\mathcal{F}_n$ hat FüE $\Rightarrow$ erhalten äußeres Maß λ^* auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

(2) analog zu Beweis von IV.2.6 $\Rightarrow \lambda := \lambda^*|_{\mathcal{B}_n}$ ist Maß mit $\lambda(I) = |I|$ f.a. $I \in \mathcal{I}_n$, aus IV.3.3 + IV.3.4

(3) Serie 8 Aufg. 3 $\Rightarrow$ λ auf $\mathcal{B}_n$ ist 1-deutig bzgl. der Eigenschaft $\lambda(I) = |I|$ f.a. $I \in \mathcal{I}_n$.

$\square$

λ auf $\mathcal{B}_n$ heißt das **Lebesgue-Maß**.

BRUNNEN

IV.3.6 **Def. + Satz:** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ die zugeordnete Borel-σ-Algebra.
Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.
Ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ heißt regulär
:⇔ (i) $\forall K \subset X$ kp gilt $\mu(K) < \infty$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A}$: $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid U \text{ offen und } A \subset U\}$
(Regularität von außen)

(iii) $\forall A \in \mathcal{A}$: $\mu(A) = \sup(\{\mu(K) \mid K \text{ kompakt}, K \subset A\})$
(Regularität von innen).

Es gilt: Sei $\mathcal{A} = \{A \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \mid A \text{ Lebesgue-messbar}\}$
Dann ist λ auf $\mathcal{A}$ regulär.

IV.3.7 **Lemma:** Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bijektion

(nicht voller stetig!)

mit $0 < c < \infty$ so daß

$$\lambda^*(\phi(I)) = c \cdot |I|$$

und $\lambda^*(\phi^{-1}(I)) = \frac{1}{c} \cdot |I|$ f.a. $I \in \mathcal{J}_n$

Dann gilt: $\lambda^*(\phi(A)) = c\,\lambda^*(A)$

und $\lambda^*(\phi^{-1}(A)) = \frac{1}{c}\,\lambda^*(A)$ f.a. $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

und A Lebesgue-messbar $\Leftrightarrow$ $\phi(A)$ Lebesgue-messbar.

Beweis: a) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beliebig und $(I_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{J}_n$

mit $A \subset \bigcup I_k$

$$\Rightarrow \phi(A) \subset \bigcup \phi(I_k)$$

$$\Rightarrow \lambda^*(\phi(A)) \leq \lambda^*(\bigcup \Phi(I_k))$$

$$\leq \sum_k \lambda^*(\Phi(I_k)) = \sum_k c\,|I_k|$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \lambda^*(\phi(A)) \leq c \cdot \lambda^*(A) \\ \text{analog } \lambda^*(\phi^{-1}(A)) \leq \frac{1}{c}\,\lambda^*(A) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lambda^*(\Phi(A)) = c\,\lambda^*(A)}$$

BRUNNEN

Sei A Lebesgue-messbar und $E \subset \mathbb{R}^n$ beliebig

$$\lambda^*(E \cap \Phi(A)) = \lambda^*(\Phi(\Phi^{-1}(E) \cap A))$$
$$= c\,\lambda^*(\Phi^{-1}(E) \cap A)$$

$$\lambda^*(E \cap \mathbb{R}^n \setminus \Phi(A)) = c\,\lambda^*(\Phi^{-1}(E) \cap \mathbb{R}^n \setminus A)$$

$$\Rightarrow \lambda^*(E \cap \Phi(A)) + \lambda^*(E \cap \mathbb{R}^n \setminus \Phi(A))$$
$$= c\,(\lambda^*(\Phi^{-1}(E) \cap A) + \lambda^*(\Phi^{-1}(E) \cap \mathbb{R}^n \setminus A))$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ A\ \lambda\text{-messbar}}}{=} c\,(\lambda^*(\Phi^{-1}(E))) = \lambda^*(E)$$

$\Rightarrow \Phi(A)$ λ-messbar

umgekehrt analog $\boxed{}$

IV.3.8 Korollar: (a) Das äußere Lebesgue-Maß ist translations-invariant

(b) λ auf $\mathcal{B}_n$ ist translations-invariant.

IV.3.9 Satz: Für jedes translationsinvariante Maß μ auf $\mathcal{B}_n$ ex. ein $c > 0$ so daß

$$\mu = c \cdot \lambda,$$

also $c = \mu([0,1]^n)$.

i.a.W.: λ ist 1-dtg auf $\mathcal{B}_n$ bzgl. Translations-inv. u. $\lambda([0,1]^n) = 1$.

BRUNNEN

IV 3.10 **Theorem** Sei $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear

Dann gilt: f.a. $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

$$\lambda^*(\Phi(A)) = |\det \Phi| \cdot \lambda^*(A).$$

Beweis: Fall 1: Φ nicht invertierbar.

$\Rightarrow$ ex. Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ mit $\dim V \leq n-1$
s.d. $\Phi(\mathbb{R}^n) \subseteq V$

$$\Rightarrow \lambda^*(\Phi(\mathbb{R}^n)) = 0.$$

Bew. siehe I.1.9. $\Phi(\mathbb{R}^n)$ ist eine n-dim. Jordan-Nullmenge

$$\Longleftrightarrow \lambda^*(\Phi(\mathbb{R}^n)) = 0.$$

Fall 2: $\Phi \in GL(n, \mathbb{R})$

Verwende Lemma IV.3.7

$\Rightarrow$ es genügt zu zeigen $\lambda(\Phi(I)) = c \cdot |I|$
$c = \det \Phi$
f.a. $I \in \mathcal{I}_n$.

BRUNNEN

Schritt 1: Sei $\Phi = \operatorname{diag}(c_1, \dots, c_n)$,

Dann gilt $\Phi(I) \in \mathcal{I}_n$ f.a. $I \in \mathcal{I}_n$

und $|\Phi(I)| = \underbrace{|c_1| \cdot \ldots \cdot |c_n|}_{|\det \Phi|} \cdot |I|$

Schritt 2: Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$

und $\phi_\sigma(x^1, \dots, x^n) = (x^{\sigma(1)}, \dots, x^{\sigma(n)})$

Dann gilt: $\phi_\sigma(I) \in \mathcal{I}_n$ f.a. $I \in \mathcal{I}_n$

und $|\phi_\sigma(I)| = |I|$

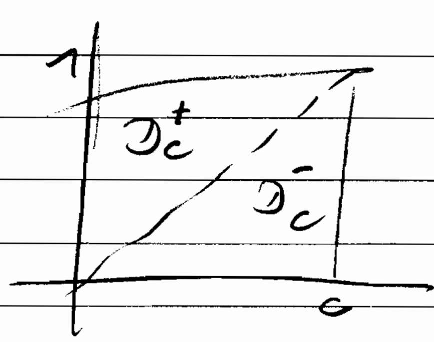
Schritt 3: Sei $c > 0$ und

$$H_c = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^1 = c x^2\}$$

und $D_c^+ = \{(x^1, \dots, x^n) \in (0, c) \times (0, 1)^{n-1} \mid x^1 < c x^2\}$

$D_c^- = \{$ " " $\mid$ " $>$ " $\}$

$D_c^0 = \{$ " $\mid$ " $=$ " $\}$



Dann gilt: Mittels Spiegelung und Translation folgt

$$\lambda^*(D_c^+) = \lambda^*(D_c^-)$$

und $\lambda^*(D_c^+) + \lambda^*(D_c^-) = c$

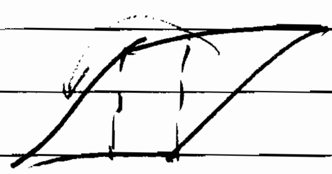
$\Rightarrow \lambda^*(D_c^\pm) = \frac{c}{2}$.

Schritt 4: Für $c \neq 0$ und $\Phi_c \in GL(n, \mathbb{R})$ die Scherung $\Phi_c(x^1, \dots, x^n) = (x^1 + cx^2, x^2, \dots, x^n)$

Dann gilt $\lambda^*(\Phi_c([0,1)^n)) = 1 = |[0,1)^n|$

Beweis: Kann $\Phi_c([0,1)^n)$ in endlich viele Rechtecke und Mengen der Form $D_c^\pm$ zerlegen.

Dann mittels Translations-Invarianz $\Rightarrow$ Beh.



Schritt 5: Nach Gauß-Algorithmus läßt sich $\Phi \in GL(n, \mathbb{R})$ faktorisieren in $\mathrm{diag}(c_1, \dots, c_n)$, Permutationen und Scherungen

also Schritt 1-4 $\Rightarrow \lambda^*(\Phi(I)) = |\det \Phi| \cdot |I|$ f.a. $I \in \mathcal{I}_n$ $\square$

BRUNNEN