Kapitel IV Maß-Theorie

§1: σ-Algebren und Maßräume

IV 1.1 **Def.:** Sei X eine gegebene Menge, $\mathcal{P}(X) = 2^X$ die Potenzmenge von X.

Dann heißt $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$

eine <u>σ-Algebra auf X</u> $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

1. $X \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$
3. $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$,

d.h. $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen

IV 1.2 **Beispiel:** (a) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ ← größtmögliche σ-Algebra

(b) $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ ← kleinstmögliche "

(c) $\mathcal{A} := \{A \subset X \mid A$ abzählbar oder $X \setminus A$ abzählb.$\}$

BRUNNEN

IV.1.3 **Lemma:** Sei $\mathcal{A}$ σ-Algebra auf X. Dann gilt:

a) $\emptyset \in \mathcal{A}$

b) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

c) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

Beweis: Übung

IV.1.4 **Satz:** Sei X fest und $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von σ-Algebren auf X.

Dann ist auch $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \in \mathcal{A}_i \text{ f.a. } i \in I\}$ eine σ-Algebra auf X.

Bew.: a) $X \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ ✓

b) Sei $A \in \bigcap \mathcal{A}_i \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}_i \; \forall i \in I$

$\Rightarrow X \setminus A \in \bigcap \mathcal{A}_i$

c) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcap \mathcal{A}_i \Rightarrow A_n \in \mathcal{A}_i \; \forall i \in I, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_i \; \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ $\square$

IV.1.5 Def Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ein beliebiges Teilmengensystem von X, dann ist

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \left\{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X),\ \mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra auf } X \text{ mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \right\}$$

die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra auf X,

d.h. die kleinste σ-Algebra auf X, die $\mathcal{E}$ enthält

Bem.: ▷ $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{P}(X)$ σ-Algebra $\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \neq \emptyset$

▷ Satz IV.1.4 $\Rightarrow \sigma(\mathcal{E})$ ist selbst eine σ-Algebra

▷ Falls $\mathcal{E}$ bereits σ-Algebra $\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

Bsp.: Sei $A \in \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{E} = \{A\}$

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, X, A, X \setminus A\}$

IV.1.6 **Def:** $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt Topologie auf X

$:\Leftrightarrow$ (a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(b) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$ (endlich schnittstabil)

(c) $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

Die Elemente einer Topologie auf X nennen wir die (bzgl. $\mathcal{T}$) offenen Mengen in X.

Bsp.: ▷ $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ heißt die diskrete Topologie auf X, d.h. jede 1-elementige Menge $\{x\}$ ist offen

▷ (X, d) Metrischer Raum

$\Rightarrow \mathcal{T}_d = \{ U \in \mathcal{P}(X) \mid \forall x \in U \; \exists r > 0 : B_r(x) \subset U \}$

heißt die durch d induzierte metrische Topologie.

z.B. $\mathbb{R}^n$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen im gewöhnlichen Sinn

Bem.: Eine Topologie ist i.A. keine σ-Algebra

$U \subset X$ offen $\Rightarrow X \setminus U$ i.A. nicht offen

BRUNNEN

IV.17 **Def:** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

Dann heißt $\mathcal{B}(\mathcal{T}) := \sigma(\mathcal{T})$

die Borel-σ-Algebra von $(X, \mathcal{T})$.

$B \in \mathcal{B}(\mathcal{T})$ heißen die Borel-Mengen auf X.

IV.18 **Bsp:** Für $\mathcal{T}$ = euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$,

d.h. erzeugt von Metrik $d(x,y) = \|x-y\|_2$

und $\mathcal{E} = \{ [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n) \mid a_i < b_i, i = 1, \ldots, n \}$

$\mathcal{F} = \{ (a_1, \infty) \times \ldots \times (a_n, \infty) \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \}$

Dann gilt:

$$\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$$

ist in allen Fällen die Standard-Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Übung, z.B.

$$[a_1, b_1) = \underbrace{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (a_1 - \tfrac{1}{n}, \infty) \right)}_{= [a_1, \infty)} \setminus \underbrace{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (b_1 - \tfrac{1}{n}, \infty) \right)}_{= [b_1, \infty)}$$

IV. 1.9 **Def.:** Ein Teilmengensystem $(\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X))$ heißt *Algebra auf X* $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

a) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
b) $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$
c) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

also
σ-Algebra $\Rightarrow$ Algebra

Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty] := [0,\infty) \cup \{+\infty\}$ heißt *Prämaß* $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

a) $\mathcal{A}$ ist eine Algebra
b) $\mu(\emptyset) = 0$
c) Falls $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, paarweise disjunkt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$,
und falls $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$,
dann gilt
(σ-Additivität) $\mu\left(\dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$

Falls μ Prämaß auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$ σ-Algebra dann heißt μ ein *Maß*.

BRUNNEN