Bem.: Beweis von 2.2.2 im allgemeinen Fall
siehe Zusatzvorlesung.

(b) Sei nun $f: \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück, orientiert durch Normalenfeld $n: f(G) \to S^2$.

Sei $\gamma: [a,b] \to G$ eine stückweise diff'bare Kurve, geschlossen $\gamma(a) = \gamma(b)$, F sei die von c berandete Fläche und einfach geschlossen, d.h. $\gamma|[a,b)$ injektiv.

Sei $c = f \circ \gamma$ durch F orientiert, d.h. haben Vf. $v(c(t)) \in T_{c(t)}F$, $F = f(G)$ s.d. $(\dot{c}, v, n)$ pos. orientiert.

Es seien $\sigma_i : [0,1]^2 \to G$ singuläre 2-Würfel, s.d. die 2-Kette $\sigma = \sum_{i=1}^{\sim} \sigma_i$
$\partial \sigma = \gamma$ erfüllt.

Bem.: Solche σ_i existieren nach den gegebenen Voraussetz.

BRUNNEN

Sei $X \in C^1(\bar{F}, \mathbb{R}^3)$ ein gegebenes Vektorfeld.

Dann gilt

$$\oint_{\partial F} X \cdot d\vec{s} = \int_a^b \langle X(c(t)), \dot{c}(t) \rangle dt$$

$$= \int_{\partial \sigma} \alpha \quad \text{mit} \quad X^\flat = \alpha,$$

$\alpha \in \Omega^1(U)$ duale 1-Form

zu $X \in \Omega^1(U)$, U Umgebung von $\bar{F}$.

3.3.4 $\Rightarrow \displaystyle\int_{\partial \sigma} \alpha = \int_\sigma d\alpha$

$$= \int_{f^{-1}(F)} f^*(\operatorname{rot} X \lrcorner \operatorname{vol}) = \int_F \operatorname{rot} X \cdot d^2\vec{A}$$

$\Rightarrow$ Beweis von 2.2.6 (Physiker-Stokes)

33.6 Beispiele

(a) Betrachte

$$f_r : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$f_r(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Dann ist $\sigma_r(t_1, t_2) = f(\pi t_1, 2\pi t_2)$

ein singulärer 2-Würfel

mit $\partial\sigma_r = 0$.

Betrachte die 2-Form

$$\omega = h(r)\frac{\partial}{\partial r} \lrcorner \, vol \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$$

$$h : (0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ glatt}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial r}\partial_y + \frac{\partial z}{\partial r}\partial_z$$

$$= \frac{x}{r}\partial_x + \frac{y}{r}\partial_y + \frac{z}{r}\partial_z$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{h(r)}{r}(x\,dy\wedge dz - y\,dx\wedge dz + z\,dx\wedge dy)$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h(r)}{r}x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h(r)}{r}y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h(r)}{r}z\right)\right) vol$$

$$= \left(\left(\frac{h(r)}{r}\right)' \frac{x^2+y^2+z^2}{r} + 3\frac{h(r)}{r}\right) vol$$

$$= \left(h' + 2\frac{h}{r}\right) vol.$$

BRUNNEN

$\int_{\sigma_r}$ $h(r) = \frac{1}{r^2}$

also $\omega = \frac{1}{r^3}(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy)$

$\Rightarrow d\omega = 0$.

Es gilt: $\int_{\sigma_r} \omega = \int_{S^2_r} \frac{1}{r^3} \vec{X} \cdot d^2\vec{A}$

mit $\vec{X} = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{X}\, d^2\vec{A} = r\, d^2A$

$\Rightarrow \int_{\sigma_r} \omega = \frac{1}{r^2} \int_{S^2_r} d^2A = 4\pi$

Angenommen $\omega = d\alpha$ f.e. $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$

$\Rightarrow 4\pi \int_{\sigma_r} \omega = \int_{\sigma_r} d\alpha = \int_{\partial\sigma_r} \alpha = 0$ $\lightning$

BRUNNEN

§ 3.4 Poincaré-Lemma

3.4.1 Def. Betrachte

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X \in \mathfrak{X}(U)$

Vektorfeld auf U.

X heißt **konservativ**

$\Leftrightarrow$ ex. $f \in C^\infty(U)$ mit $X = \nabla f$.

also $\alpha = X^* \in \Omega^1(U)$ mit $\alpha = df$.

Eine notwendige Bedingung für konservative VF.

ist $dX^* = 0$.

Berechnung des Potentials für konserv. VF.:

Für U zshg. und $x_0 \in U$ fest.

Dann wähle für $x \in U$ ein Weg $c: [0,1] \to U$

von x_0 nach x und definiere

$$f_{x_0}(x) := \int_c \alpha$$

<u>Satz:</u> Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ konvex

Dann gilt: Jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(U)$ welches die <u>Integrabilitätsbedingung</u> $dX^* = 0$ erfüllt, ist konservativ.

<u>Beweis:</u> Sei $x_0 \in U$ fest.

und betrachte $c(t) = x_0 + t(x - x_0)$

$\Rightarrow$ definiere $f(x) = \int_c \vec{X} \cdot d\vec{s} = \int_c X^*$

<u>Übungsaufgabe:</u> $\nabla f(x) = X$. $\square$

<u>Bem:</u> <u>Man kann zeigen:</u> Für U konvex gilt:

$\forall\, \sigma \in C_1(M)$ mit $\partial\sigma = 0$

ex. $\bar{\sigma} \in C_2(M)$ mit $\partial\bar{\sigma} = c$

Daraus <u>folgt:</u> Man kann für $f_{x_0}(x) = \int_\sigma X^*$ jeden Weg in U nehmen.

(3.42) **Def.** Eine Differential-k-Form
$\alpha \in \Omega^k(U)$ auf $U \subset \mathbb{R}^n$ offen
heißt { **geschlossen** $:\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $d\alpha = 0$
{ **exakt** $:\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ex. $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ mit $d\eta = \alpha$.

Bem. exakt $\Rightarrow$ geschlossen.

(3.43) **Satz** (Poincaré-Lemma)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft:
ex. $S : [0,1] \times U \to U$ glatt mit
$$S(1,x) = x \text{ f.a. } x \in U$$
$$S(0,x) = x_0 \text{ f.a. } x \in U.$$
(z.B. U sternförmig)
Dann gilt: Jede geschlossene k-Form auf U ist exakt.

Bew. Zusatzmat. bzw. Skript.

BRUNNEN

3.4.4 **Def.:** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \geq 0$.

Dann betrachte die $\mathbb{R}$-Vektorräume

$$Z^k(U) = \{\omega \in \Omega^k(U) \mid d\omega = 0\}$$

$$= \{\text{geschlossene } k\text{-Formen auf } U\}$$

$$B^k(U) = \{d\eta \in \Omega^k(U) \mid \eta \in \Omega^{k-1}(U)\}$$

$$= \{\text{exakte } k\text{-Formen auf } U\}$$

Wegen $d \circ d = 0$ gilt:

$B^k(U)$ ist ein Untervektorraum von $Z^k(U)$

Dann def.

$$H^k_{dR}(U) := Z^k(U) / B^k(U)$$ als Quotientenvektorraum

$H^k_{dR}(U)$ heißt die k-te de-Rham-Kohomologie von U.

BRUNNEN

3.4.5 Bem. + Ausblick

▷ Es gilt: Für $U \subset \mathbb{R}^n$ so daß das

Poincaré-Lemma 2.4.3 gilt und U zusammenhängend.

$$\Rightarrow \quad H^k(U) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k=0 \\ \{0\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

▷ $$H^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k=0 \\ \{0\}, & 0<k<n-1 \\ \mathbb{R}, & k=n-1 \\ \{0\}, & k \geq n \end{cases}$$

für $n \geq 2$

BRUNNEN