Kapitel III: Differentialformen auf $\mathbb{R}^n$

§1. Die Grassmann-Algebra $\Lambda(\mathbb{R}^n)$

1.1 Def. + Notation:

Sei V ein n-dim. $\mathbb{R}$-VR

und $V^* = \operatorname{Hom}(V, \mathbb{R})$ der zugehörige Dualraum

Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V

dann erhalten wir eine zugeordnete duale Basis

$v_1^*, \dots, v_n^*$ durch $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le n$

Die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} := e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Stelle}$$

die zugehörige Dualbasis mit $dx_1, \dots, dx_n$

BRUNNEN

Eine alternierende k-Form auf V

ist eine Abbildung

$\omega: V \times \dots \times V = V^k \to \mathbb{R}$ mit

(1) $\omega(\dots, \lambda v_i + \mu w_i, \dots)$ $\forall\, i = 1, \dots, k$

$= \lambda\, \omega(\dots, v_i, \dots) + \mu\, \omega(\dots, w_i, \dots)$

d.h. linear in allen Einträgen

(2) $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$ falls $v_i = v_j$ für $i \neq j$

Bem: (2) ist äquivalent zu

(2') $\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k)$

$= -\omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, \dots)$

d.h. antisymmetrisch bei Vertauschung von Argumenten

Bew: (2) $\Rightarrow$ $0 = \omega(\dots, v+w, \dots, v+w, \dots)$

$\overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \omega(\dots, v, \dots, w, \dots) + \omega(\dots, w, \dots, v, \dots)$

$\Rightarrow$ (2')

(2') $\Rightarrow$ (2) trivial.

Offenbar (2) $\Leftrightarrow$ $\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$

$= (-1)^{|\sigma|}\, \omega(v_1, \ldots, v_k)$

für $\sigma \in S_k$

Sei $\Lambda^k V^* = \{$alternierende k-Formen auf $V\}$

(B.1.2) Beispiel: $\det \in \Lambda^n (\mathbb{R}^n)^*$

(B.1.3) Satz: Sei V ein n-dim $\mathbb{R}$-VR.

Dann ist $\Lambda^k V^*$ ein $\mathbb{R}$-VR der

Dimension $\binom{n}{k}$ und $\Lambda^k V^* = \{0\}$ für $k > n$.

Def.: Falls $k = 0$, so definieren wir $\Lambda^0 V^* := \mathbb{R}$

Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in V^*$, dann def.

$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k V^*$ durch

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(v_1, \ldots, v_k) := \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \ldots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \ldots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{|\sigma|} \varphi_1(v_{\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot \varphi_k(v_{\sigma(k)}).$$

BRUNNEN

Beweis Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V.

Beh.: Dann ist $\{ v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^* \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \}$ eine Basis von $\Lambda^k V^*$.

Bew.: Es gilt $(v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^*)(v_{j_1}, \dots, v_{j_k})$

$$= \sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} \delta_{\sigma(i_1) j_1} \cdots \delta_{\sigma(i_k) j_k}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{|\sigma|}, & \text{falls } (j_1, \dots, j_k) = (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)) \text{ für ein } \sigma \in S_k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall \omega \in \Lambda^k V^*$ gilt:

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})\, v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^*$$

$\Rightarrow$ Beh.

$\square$

Bem.:

$$\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$$
$$\Lambda^1 V^* = V^*$$
$$\Lambda^n V^* = \mathbb{R} \cdot (v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^*)$$
$$\Lambda^k V^* = \{0\} \text{ für } k \geq n+1$$

Bsp Sei $V = \mathbb{R}^3 = \operatorname{span}(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$

$$V^* = \operatorname{span}(dx, dy, dz)$$

Also $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^* = \operatorname{span}(dx \wedge dy,\ dx \wedge dz,\ dy \wedge dz)$

$$\Lambda^3(\mathbb{R}^3)^* = \mathbb{R} \cdot \underbrace{dx \wedge dy \wedge dz}_{\hat{=}\ \det}$$

3.1.4 Def.: Eine Algebra über $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-VR A mit einer Abb.

$$A \times A \to A \qquad \text{Produkt}$$
$$(a, b) \mapsto ab$$

s.d.
- $a(bc) = (ab)c$
- $(a + a')b = ab + a'b, \quad a(b + b') = ab + ab'$
- $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$

Sei $\Lambda K^* := \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k V^*$ für $\dim V = n$.

also $\dim \Lambda V^* = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Definiere Produkt

$$\wedge : \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \to \Lambda^{k+l} V^*$$

durch $(v_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge v_{i_k}^*) \wedge (v_{j_1}^* \wedge \ldots \wedge v_{j_l}^*)$

$$= \begin{cases} (-1)^{\sigma} v_{\sigma(i_1)}^* \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(j_l)}^*, & \text{mit } \sigma \in S_{k+l} \text{ s.d. } \sigma(i_1) < \ldots < \sigma(j_l) \text{ falls } \{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_l\} = \emptyset \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Übung: (a) Sei $w_1, \ldots, w_n$ andere Basis

mit $(w_1 \ldots w_n) = C(v_1, \ldots, v_n)$, $C \in GL(n, \mathbb{R})$

Dann gilt $w_1^* \wedge \ldots \wedge w_n^* = \frac{1}{\det C} v_1^* \wedge \ldots \wedge v_n^*$

(b) Seien $\alpha, \beta \in V^*$,

dann ist $(\alpha \wedge \beta)(v, w) = \alpha(v) \cdot \beta(w) - \alpha(w)\beta(v)$.

BRUNNEN

Sei also $v_1, \dots, v_n$ Basis von V

$\Rightarrow \wedge : \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \to \Lambda^{k+l} V^*$

zunächst für Basisvektoren $v^*_{i_1} \wedge \dots \wedge v^*_{i_k}$ def.
$v^*_{j_1} \wedge \dots \wedge v^*_{j_l}$

Durch lineare Fortsetzung für $\alpha \in \Lambda^k V^*$, $\beta \in \Lambda^l V^*$ definiert.

$\Rightarrow$ Definition hängt nicht von Wahl der Basis ab.
(siehe auch Satz 4.1.6 unten)

Wir erhalten Algebra-Struktur

$\wedge : \Lambda V^* \times \Lambda V^* \to \Lambda V^*$

$(\Lambda V^*, \wedge)$ heißt die Grassmann-Algebra zu V^*.

B.1.5) Bsp:

$$\triangleright \quad (3dx - 2dx\wedge dz + 5dx\wedge dy) \wedge (8dx\wedge dy - 2dy\wedge dz)$$

$$= -6\, dx\wedge dy\wedge dz$$

B.1.6) Satz: (a) Seien $\alpha \in \Lambda^k V^*$, $\beta \in \Lambda^\ell V^*$

dann gilt $\beta\wedge\alpha = (-1)^{k\ell}\, \alpha\wedge\beta$

(b) $(\alpha\wedge\beta)(v_1, \dots, v_{k+\ell})$

$$= \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\sigma\in S_{k+\ell}} (-1)^\sigma \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)})$$

Bew: Übung.

Def.

B.17 Betrachte

$V = \mathbb{R}^3$ und die VR-Isom

$\phi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} \Lambda^1(\mathbb{R}^3)^*$

$\phi\left(\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}\right) = v^1 dx + v^2 dy + v^3 dz$

sowie $\psi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$

$\psi\left(\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}\right) = v^3 dx \wedge dy - v^2 dx \wedge dz + v^1 dy \wedge dz$

Dann gilt: $\psi(v \times w) = \phi(v) \wedge \phi(w)$,

also

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "\phi \times \phi"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "\psi"] \\ \Lambda^1(\mathbb{R}^3)^* \times \Lambda^1(\mathbb{R}^3)^* \arrow[r, "\wedge"] & \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^* \end{tikzcd}$$

ist ein kommutatives Diagramm.

Verstehe $\wedge$ als Erweiterung und Verallgemeinerung des $\times$-Produktes!

Bew: $(v^1 dx + v^2 dy + v^3 dz) \wedge (w^1 dx + w^2 dy + w^3 dz)$

$= (v^1 w^2 - v^2 w^1) dx \wedge dy + (v^1 w^3 - v^3 w^1) dx \wedge dz + (v^2 w^3 - v^3 w^2) dy \wedge dz = \psi(v \times w)$

BRUNNEN

3.18) Lemma k duale Vektoren $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \neq 0$ in $\Lambda^k V^*$.

Bew. „$\Leftarrow$": Angenommen $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ lin. abhängig

$\Rightarrow$ oBdA $\varphi_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i \varphi_i$

$\Rightarrow \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k = \sum_{i=2}^{k} a_i (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_{k-1} \wedge \varphi_i) = 0$

„$\Rightarrow$": Sei $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ lin. unabh.

Wähle Basisergänzung zu $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n$ von V^*.

Sei $v_1, \dots, v_n$ Basis von V mit dualer Basis $v_1^*, \dots, v_n^*$

$\Rightarrow \varphi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j^*$

$\Rightarrow (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)(v_1, \dots, v_n) = \det(a_{ij}) \neq 0$

$\Rightarrow \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \neq 0$. $\square$

3.19 Def. Sei $\phi \in \mathcal{L}(V,W) = \mathrm{Hom}(V,W)$ lineare Abb. und $\omega \in \Lambda^k W^*$. Dann def. das Pull-Back $\phi^*\omega \in \Lambda^k V^*$ durch

$$(\phi^*\omega)(v_1, \ldots, v_k) := \omega(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_k))$$

Lemma: Es gilt für $\omega \in \Lambda^k W^*$, $\eta \in \Lambda^l W^*$:

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = (\phi^*\omega) \wedge (\phi^*\eta)$$

Bew.: $\phi^*(\omega\wedge\eta)(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_l)$

$$= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \omega(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_k)) \cdot \eta(\phi(v_{k+1}), \ldots, \phi(v_{k+l}))$$

$$= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\phi^*\omega)(v_1, \ldots, v_k) \cdot (\phi^*\eta)(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l})$$

$$= ((\phi^*\omega) \wedge (\phi^*\eta))(v_1, \ldots, v_{k+l})$$

Lemma: Seien $\dim V = n$, $\omega \in \Lambda^n V^*$ und $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt $\phi^*\omega = \det\phi \cdot \omega$.

Bew.: Sei $v_1, \ldots, v_n$ Basis von V

$\Rightarrow$ ex. $\lambda \in \mathbb{R}$ sd. $\omega = v_1^* \wedge \ldots \wedge v_n^*$.

$\Rightarrow \quad \lambda = \omega(v_1, \ldots, v_n)$

$\Rightarrow \quad (\phi^* \omega)(v_1, \ldots, v_n) = \lambda (v_1^* \wedge \ldots \wedge v_n^*)(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n))$

$$= \lambda \det \begin{pmatrix} v_1^*(\phi(v_1)) & \ldots & v_1^*(\phi(v_n)) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & v_n^* \phi(v_n) \end{pmatrix}$$

$= \lambda \det \phi = \det \phi \; \omega(v_1, \ldots, v_n)$

$\Rightarrow \quad \boxed{\phi^* \omega = \det \phi \; \omega}$.

3.1.10 Def.: Zwei Basen $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_n$ von V heißen gleichorientiert

$:\Leftrightarrow \quad w_i = \sum \phi_{ij} v_j$, d.h. $(w_1, \ldots, w_n) = \phi(v_1, \ldots, v_n)$ mit $\det \phi > 0$

Eine Äquivalenzklasse $[\omega] \in \Lambda^n V^* / \mathbb{R}^+$ heißt Orientierung von V.

§2 Differentialformen

(3.2.1) **Def.:** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Eine Differential-k-Form, kurz k-Form, auf U ist eine Abb.

$$\omega : U \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$$
$$p \mapsto \omega_p$$

Bzgl. der Standardbasis $\{dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$ haben wir

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} a_{i_1 \ldots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

mit $a_{i_1 \ldots i_k} : U \to \mathbb{R}$.

ω heißt r-mal stetig diff'bar $\Leftrightarrow$

$$a_{i_1 \ldots i_k} \in C^r(U, \mathbb{R}) \quad \forall \, 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n.$$

$\Omega^k(U) := \{\infty\text{-mal st. diff'bare k-Formen } \omega \text{ auf } U\}$.

$\Omega^0(U) = C^\infty(U)$.

Wir setzen

$$\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(U)$$

$\omega, \eta \in \Omega(U) \rightsquigarrow (\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p$.

$\mathcal{X}(U) = C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$

$=$ Vektorraum der glatten Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$.

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

und $vol := dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \in \Omega^n(U)$

die konstante n-Form.

Wir haben den VR-Isom.

$$\mathcal{X}(U) \xrightarrow{\cong} \Omega^1(U)$$

$$X \mapsto \langle X, \cdot \rangle = X^*$$

$$\langle X, \cdot \rangle_p = \langle X(p), \cdot \rangle \in (\mathbb{R}^n)^* = \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$$

3.22 Def

Sei $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$

Dann def. $df \in \Omega^1(M)$ durch

$$df_p := Df(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$$

Also, $df_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\, dx^i$

$\rightsquigarrow$ $df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$ = totales Differential

Wir haben $d: \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$

als $\mathbb{R}$-linearen Operator mit

$$d(fg) = f\,dg + g\,df \quad \text{Produktregel.}$$

Sei nun $\omega \in \Omega^k(M)$, also

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} a_{i_1 \ldots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

$$a_{i_1 \ldots i_k} \in C^\infty(M) = \Omega^0(M).$$

BRUNNEN

Dann definieren wir

$d\omega \in \Omega^{k+1}(U)$ durch

$$d\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} da_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

d heißt das __äußere Differential__.

__Bsp.__ ▷ $\omega = x\,dy \wedge dz - z^2 dx \wedge dy + x^2 dx \wedge dz$

$$\Rightarrow d\omega = dx \wedge dy \wedge dz - 2z\,dx \wedge dy \wedge dz$$

$$= (1 - 2z)\, dx \wedge dy \wedge dz$$

(3.23) Betrachte folgende VR-Isom. für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen

$$\mathfrak{X}(U) \xrightarrow{\cong} \Omega^1(U)$$
$$X \mapsto X^* = \langle X, \cdot \rangle$$

$$\mathfrak{X}(U) \xrightarrow{\cong} \Omega^{n-1}(U)$$

$$X \mapsto X \lrcorner \mathrm{vol} = (dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n)(X, \cdot, \ldots, \cdot)$$

$$C^\infty(U) \xrightarrow{\cong} \Omega^n(U)$$
$$f \mapsto f \cdot \mathrm{vol}$$

Satz Dann gilt:

(a) $(\operatorname{grad} f)^* = df$ f.a. $f \in \Omega^0(M)$

(b) $d(X \lrcorner \mathrm{vol}) = \operatorname{div} X \cdot \mathrm{vol}$ f.a. $X \in \mathcal{X}(M)$

(c) Falls $n=3$:

$$dX^* = \operatorname{rot} X \lrcorner \mathrm{vol}$$

Also wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} C^\infty(M) & \xrightarrow{\operatorname{grad}} & \mathcal{X}(M) & \xrightarrow{\operatorname{rot}} & \mathcal{X}(M) & \xrightarrow{\operatorname{div}} & C^\infty(M) \\ \| & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \cong \\ \Omega^0(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{n-1} & \xrightarrow{d} & \Omega^n(M) \end{array}$$

falls $n=3$

Beweis: Übungsaufgabe.

3.2.4 **Satz.** Für das äußere Differential $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ gilt:

ⓐ $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ für $\omega \in \Omega^k(U)$, $\eta \in \Omega^l(U)$

ⓑ $d(d\omega) = 0$ | für $\omega \in \Omega^k(U)$.

Beweis: ⓐ Verwende Komponentendarstellung

$I = (i_1, \dots, i_k)$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$
$J = (j_1, \dots, j_l)$, $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n$

$$\omega = \sum_I a_I \underbrace{dx_I}_{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}}, \quad \eta = \sum_J b_J \, dx_J$$

$$\Rightarrow d(\omega \wedge \eta) = \sum_{I,J} d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J$$
$$= \sum_{I,J} a_I \, db_J \wedge dx_I \wedge dx_J + b_J \, da_I \wedge dx_I \wedge dx_J$$
$$= \sum_{I,J} (-1)^k a_I \, dx_I \wedge db_J \wedge dx_J + da_I \wedge dx_I \wedge (b_J \, dx_J)$$
$$= (-1)^k \sum_I a_I \, dx_I \wedge d\left(\sum_J b_J \, dx_J\right) + d\left(\sum_I a_I \, dx_I\right) \wedge \sum_J b_J \, dx_J$$
$$= (-1)^k \omega \wedge d\eta + d\omega \wedge \eta.$$

(3) $d(d\omega) = d\left(\sum_I da_I \wedge dx_I\right)$

$$= d\left(\sum_{I,j} \frac{\partial a_I}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx_I\right)$$

$$= \sum_{I,j} d\left(\frac{\partial a_I}{\partial x^j}\right) \wedge dx^j \wedge dx_I$$

$$= \sum_{I,j,k} \frac{\partial^2 a_I}{\partial x^k \partial x^j}\, dx^k \wedge dx^j \wedge dx_I$$

$$= \sum_I \sum_{1 \le j < k \le n} \left(\frac{\partial^2 a_I}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 a_I}{\partial x^j \partial x^k}\right) dx^k \wedge dx^j \wedge dx_I$$

$= 0$, da $a_I \in C^2(M)$, S.v. Schwarz $\square$

(3.2.5) Def. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen,

$f: U \to V$ eine C^∞-Abb.

und $\omega \in \Omega^k(V)$ dann def. pull-back

$f^*\omega \in \Omega^k(U)$ durch

$$(f^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{f(p)}\left(Df(p)[v_1], \ldots, Df(p)[v_k]\right)$$

Also $f^*: \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$ $\mathbb{R}$-lineare Abb.

Satz: Es gilt

(a) Falls $dy^1, \dots, dy^m \in (\mathbb{R}^m)^*$
$dx^1, \dots, dx^n \in (\mathbb{R}^n)^*$

Dann $f^*(dy^i) = df^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j$

$f = (f^1, \dots, f^m)$

(b) $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$

(c) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$

Bew. Übung

(3.2.6) Bsp. Betrachte Koordinaten

$f(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$x = r\cos\varphi$
$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$
$dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$

$f^* dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$
$f^* dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$

$f^*(dx \wedge dy) = r\, dr \wedge d\varphi$

$f^*\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \right) = \frac{1}{r^2}\Big(r\cos\varphi\,(\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi) - r\sin\varphi\,(\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi)\Big)$

$= d\varphi$

$d\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \right) = 0$

§3.3 Der Satz von Stokes

(3.3.1) Def.: Sei $[0,1]^k$

$$= \{(x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 \le x^i \le 1, i = 1, \dots, k\}$$

der k-dimensionale Einheitswürfel

und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Eine C^1-Abb. $\sigma : [0,1]^k \to U$

ist eine Abb. so daß $\sigma : V \to U$ C^1

für eine offene Umgebung V von $[0,1]^k$ in $\mathbb{R}^k$.

σ heißt dann singulärer k-Würfel in U

Eine singuläre k-Kette in U ist eine

formale ganzzahlige Linearkombination

$c = a_1\sigma_1 + \dots + a_r\sigma_r$, $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ singul. k-Würfel, $r \in \mathbb{N}$

Sei $C_k(U)$ die additive Gruppe

aller singulären k-Ketten

Seien $c = a_1\sigma_1 + \dots + a_\nu\sigma_\nu$

$c' = b_1\sigma_1' + \dots + b_{\nu'}\sigma_{\nu'}'$

mit $\sigma_1 = \sigma_1', \dots, \sigma_i = \sigma_i'$, $i \leq \min(\nu, \nu')$

$\Rightarrow c + c' = (a_1 + b_1)\sigma_1 + \dots + (a_i + b_i)\sigma_i +$

$a_{i+1}\sigma_{i+1} + \dots + a_\nu\sigma_\nu + b_{i+1}\sigma_{i+1}' + \dots + b_{\nu'}\sigma_{\nu'}'$

Also: $C_k(M)$ ist die freie abelsche Gruppe endlich erzeugt von allen singulären k-Würfeln.

Sei $I^k : [0,1]^k \to \mathbb{R}^k$ die kanonische Inklusion, also I^k ist der kanonische singuläre k-Würfel in $\mathbb{R}^k$.

Die $2 \cdot k$ $(k-1)$-dimensionalen Seiten von $[0,1]^k$ liefern singuläre $(k-1)$-Würfel in $\mathbb{R}^k$

$I^k_{(i,0)} : [0,1]^{k-1} \to \mathbb{R}^k$, $I^k_{(i,0)}(x^1, \dots, x^{k-1}) := (x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^i, \dots, x^{k-1})$

$I^k_{(i,1)} : [0,1]^{k-1} \to \mathbb{R}^k$, $I^k_{(i,1)}(x^1, \dots, x^{k-1}) := (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^{k-1})$

$i = 1, \dots, k$

Wir definieren den Rand von I^k als die singuläre $(k-1)$-Kette in $\mathbb{R}^k$

$$\partial I^k := \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \left(I^k_{(i,0)} - I^k_{(i,1)} \right)$$

Beispiele $k=1$: $I^1 : [0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}$

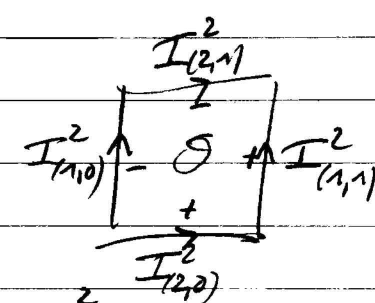
$$I^1_{(1,0)} : \{0\} \mapsto 0$$

$$I^1_{(1,1)} : \{0\} \mapsto 1$$

$$\partial I^1 = 1 - 0$$

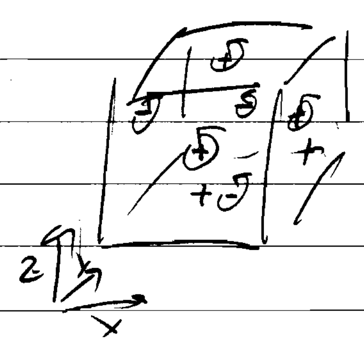
$k=2$: $I^2 : [0,1]\times[0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^2$

$$I^2_{(1,0)} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (0,t)$$



$$\partial I^2 = I^2_{(1,1)} - I^2_{(1,0)} + I^2_{(2,0)} - I^2_{(2,1)}$$

$k=3$:



Sei $c \in C_k(M)$, $c = n_1 \sigma_1 + \dots + n_r \sigma_r$

$\sigma_i : [0,1]^k \to M$ singuläre k-Würfel.

Dann def. wir

$$\partial \sigma_i = \sigma_i \circ \partial I^k := \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \left(\sigma_i \circ I^k_{(j,0)} - \sigma_i \circ I^k_{(j,1)} \right)$$

und $\partial c := n_1 \partial \sigma_1 + \dots + n_r \partial \sigma_r$

Also $\partial c \in C_{k-1}(M)$.

Wir erhalten einen Gruppenhomomorphismus

$$\partial : C_k(M) \to C_{k-1}(M)$$

3.32 **Satz:** Es gilt $\partial(\partial c) = 0$ f.a. $c \in C_k(M)$

Bsp. $\partial I^2 = I^2_{(1,1)} - I^2_{(1,0)} - I^2_{(2,1)} + I^2_{(2,0)}$

Also: $\partial I^2(t) = (1,t) - (0,t) - (t,1) + (t,0)$ ← nicht die Addition in $\mathbb{R}^2$!

$$\Rightarrow \partial(\partial I^2) = (1,1) - (1,0) - (0,1) + (0,0) - (1,1) + (0,1) + (1,0) - (0,0) = 0.$$

BRUNNEN

Beweis Sei $c = n_1\sigma_1 + \ldots + n_r\sigma_r$

singuläre k-Kette

$$\Rightarrow \partial(\partial c) = n_1 \partial^2\sigma_1 + \ldots + n_r\partial^2\sigma_r$$

$$\partial^2\sigma_i = \partial(\sigma_i \circ \partial I^k) = \sigma_i \circ \partial^2 I^k$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \left(\sigma_i \circ \partial I^k_{(j,0)} - \sigma_i \circ \partial I^k_{(j,1)}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^l \Big(\sigma_i \circ I^k_{(j,0)} \circ I^{k-1}_{(l,0)} - \sigma_i \circ I^k_{(j,0)} \circ I^{k-1}_{(l,1)}$$
$$- \sigma_i \circ I^k_{(j,1)} \circ I^{k-1}_{(l,0)} + \sigma_i \circ I^k_{(j,1)} \circ I^{k-1}_{(l,1)}\Big)$$

Sei $j \le l$: $\left(I^k_{(j,0)} \circ I^{k-1}_{(l,0)}\right)(x^1, \ldots, x^{k-2})$

$$= (x^1, \ldots, x^{j-1}, 0, x^j, \ldots, x^{l-1}, 0, x^l, \ldots, x^{k-2})$$

$j = l$: $\quad$ " $= (x^1, \ldots, x^{j-1}, 0, 0, x^j, \ldots, x^{k-2})$

$l < j$: $\quad$ " $= (x^1, \ldots, x^{l-1}, 0, x^l, \ldots, x^{j-1}, 0, x^j, \ldots, x^{k-2})$

$$\Rightarrow I^k_{(j,0)} \circ I^{k-1}_{(l,0)} = I^k_{(l,0)} \circ I^{k-1}_{(j-1,0)} \quad \text{falls } l < j$$

etc.

$$\Rightarrow \boxed{\partial^2 I^k = 0}$$

$\square$

3.3.3 **Def.:** Sei $G \subset \mathbb{R}^k$ ein offenes Gebiet,
$K \subset G$ kompakte Teilmenge, Jordan-messbar
d.h. ∂K eine k-dim Nullmenge.
Sei $f: G \to U \subset \mathbb{R}^n$
eine C^1-Abb. und $\omega \in \Omega^k(U)$.
Dann definieren wir $\int_K \omega \in \mathbb{R}$
wie folgt:
$f^*\omega \in \Omega^k(G)$ hat die Form
$f^*\omega = a(x^1, \dots, x^k)\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$
für eine mindestens stetige Funktion $a: U \to \mathbb{R}$

$$\int_f \omega := \int_K f^*\omega := \int_K a\, dx^1 \dots dx^n = \int_G 1_K \cdot a\, d^k(x^1, \dots, x^k)$$

ist wohldef.

Bsp: Sei $c: [a,b] \to M$ ein diff'barer Weg
und $\alpha \in \Omega^1(M)$, $\alpha = a_1 dx^1 + \dots + a_n dx^n$
$c(t) = (c^1(t), \dots, c^n(t))$

Dann ist $\int_{[a,b]} c^*\alpha = \int_a^b \alpha_{c(t)}(\dot{c}(t))\,dt$

$= \int_a^b \left(a_1(c(t))\dot{c}^1 + \ldots + a_n(c(t))\dot{c}^n\right) dt$

Sei nun $\sigma : [0,1]^k \to U \subset \mathbb{R}^n$

ein singulärer k-Würfel in U

und $\omega \in \Omega^k(U)$

Dann def. $\int_\sigma \omega := \int_{[0,1]^k} \sigma^*\omega$

Sei $c = \sum_{\nu=1}^r n_\nu \sigma_\nu \in C_k(U)$ eine sing. k-Kette

dann def. $\int_c \omega := \sum_{\nu=1}^r n_\nu \int_{\sigma_\nu} \omega$.

Bsp. $\sigma : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$

$\sigma(t^1, t^2) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t^2 \sin \pi t^1 \\ \sin 2\pi t^2 \sin \pi t^1 \\ \cos \pi t^1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \sigma \in C_2(\mathbb{R}^3)$ mit $\sigma([0,1]^2) = S^2$

und $\partial\sigma = 0$

Sei $\omega = x\,dx \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$

Sehe $\int_\sigma \omega = \pm 4\pi$ Bew. Übung

33.4 **Theorem** (Satz von Stokes)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \geq 0$, $c \in C_{k+1}(U)$ eine singuläre $(k+1)$-Kette.

Sei $\omega \in \Omega^k(U)$. Dann gilt:

$$\boxed{\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega}.$$

Beweis: Schritt 1 Sei $n = k+1$

und $c = I^{k+1} : [0,1]^{k+1} \to \mathbb{R}^{k+1}$

Also ist $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^{k+1})$, d.h.

$$\omega = \sum_{i=1}^{k+1} f_i(x)\, dx^1 \wedge \dots \wedge \underset{\text{auslassen}}{\widehat{dx^i}} \wedge \dots \wedge dx^{k+1}$$

$$\Rightarrow d\omega = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} (-1)^{i+1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k+1}$$

Also $$\int_c d\omega = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^{k+1}} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \dots dx^{k+1}$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^k} \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i(x^1, \dots, x^{i-1}, t, x^{i+1}, \dots, x^{k+1})}{\partial t} dt \right) dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^k$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hauptsatz der Diff.- und Integr.}}}{=} \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^k} \Big[f_i(x^1,\dots,x^{i-1},1,x^{i+1},\dots,x^{k+1}) - f_i(\dots,0,\dots) \Big] \, dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^{k+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^k} \left(I^{k+1}_{(i,1)}\right)^* \omega - \left(I^{k+1}_{(i,0)}\right)^* \omega$$

$$= \int_{\partial I^{k+1}} \omega .$$

Schritt 2: Sei nun

$\sigma : [0,1]^{k+1} \to U \subset \mathbb{R}^n$ ein singulärer $(k+1)$-Würfel in $U \subset \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$ Können σ schreiben als $\sigma = \sigma \circ I^{k+1}$

Sei $\omega \in \Omega^k(U)$

$$\Rightarrow \int_\sigma d\omega = \int_{I^{k+1}} \sigma^* d\omega \quad \text{für } \sigma^* d\omega = d(\sigma^*\omega), \; \sigma^*\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$$

$$\underset{\text{Schritt 1}}{=} \int_{\partial I^{k+1}} \sigma^* \omega$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \left(\int_{I^{k+1}_{(i,0)}} \sigma^*\omega - \int_{I^{k+1}_{(i,1)}} \sigma^*\omega \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \left(\int_{c\circ I^{k+1}_{(i,0)}} \omega - \int_{c\circ I^{k+1}_{(i,1)}} \omega \right)$$

$$= \int_{\partial c} \omega .$$

__Schritt 3:__ Sei nun $c \in C_{k+1}(W)$

$$c = \sum_{j=1}^{r} n_j \sigma_j , \quad \sigma_j : [0,1]^{k+1} \to W$$

$$\Rightarrow \int_c d\omega = \int_{\sum_j n_j \sigma_j} d\omega = \sum_j n_j \int_{\sigma_j} d\omega$$

$$\overset{\text{Schritt 2}}{=} \sum_j n_j \int_{\partial \sigma_j} \omega = \int_{\partial c} \omega \qquad \square$$

3.3.5 Anwendungen

(a) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Gebiet

$f: G \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück

mit Orientierung $n: G \to S^2$ und Vektorfeld $X: F \to \mathbb{R}^3$, $F = f(G)$

Dann betrachte $vol = dx \wedge dy \wedge dz \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$

und $f^*(X \lrcorner vol) = f^*(\det(X, \cdot, \cdot))$

$= \det(X, f_u, f_v) \cdot du \wedge dv,$

wobei $G \ni (u,v) \mapsto f(u,v) \in \mathbb{R}^3$

Also gilt: $f^*(X \lrcorner vol) = (X \cdot (f_u \times f_v))\, du \wedge dv$

Sei $[0,1]^2 \subset G$. Dann gilt für $\sigma = f|[0,1]^2$

$$\int_\sigma X \lrcorner vol = \int_{[0,1]^2} X \cdot (f_u \times f_v)\, du\, dv$$

$$= \int_{[0,1]^2} \vec{X} \cdot d\vec{A}, \text{ falls } n = \frac{f_u \times f_v}{|\ \cdot\ |}$$

und $= -$ " , falls $n = -$ "

Spezialfall:

Sei $f : [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$

ein singulärer 3-Würfel, so daß

$$f \circ I^3_{(i,j)} : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{f.a. } i = 1, \ldots, 3,\ j = 0,1$$

jeweils ein reguläres, parametrisiertes Flächenstück.

Sei $F = \bigcup_{(i,j)} f \circ I^3_{(i,j)}([0,1]^2)$ das umparam. Flächenstück, orientiert durch äußeres Normalenfeld,

und $X : f([0,1]^3) \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld.

Dann gilt:
$$\int_{\partial f} X \lrcorner \mathrm{vol} = \sum_{i=1}^{3} (-1)^i \left(\int_{[0,1]^2} (f \circ I^3_{(i,1)})^* (X \lrcorner \mathrm{vol}) - \int_{[0,1]^2} (f \circ I^3_{(i,0)})^* (X \lrcorner \mathrm{vol}) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left(\int_{f(I^3_{(i,0)}([0,1]^2))} \vec{X} \cdot d^2\vec{A} + \int_{f(I^3_{(i,1)}([0,1]^2))} \vec{X} \cdot d^2\vec{A} \right)$$

$$= \int_F \vec{X} \cdot d^2\vec{A}$$

$$3.34 \Rightarrow \quad = \int_f d(X \lrcorner \mathrm{vol}) \overset{3.2.3}{=} \int_f \mathrm{div}\, X \cdot \mathrm{vol}$$

$$= \int_{f([0,1]^3)} \mathrm{div}\, X \, d^3(x,y,z) \quad \Rightarrow$$ Satz v. Gauß 2.2.2 für Spezialfall.