

Topologische Analyse des Konfigurationsraumes eines Gestänges

wissenschaftlich-praktische Arbeit

Universität Leipzig,
Fakultät für Mathematik

eingereicht von

Diana Khoromskaia,
Wilhelm-Ostwald-Gymnasium,
Schuljahr 2004/05

Betreuer: Herr Prof. Dr. Matthias Schwarz

Leipzig, 6. Juli 2005

Bibliographische Beschreibung

Titel: Topologische Analyse des Konfigurationsraumes eines Gestänges.

Verfasser: Diana Khoromskaia.

Einrichtung: Universität Leipzig, Fakultät für Mathematik und Informatik.

Seiten:

Anlagen:

Zeitraum: 14.09.2004 – 4.07.2005.

Vorwort

Die vorliegende wissenschaftlich-praktische Arbeit befasst sich mit dem Konfigurationsraum eines ebenen Gestänges, den man sich als vereinfachten Greifarm eines Roboters vorstellen könnte. Es besteht aus drei Doppelarmen, die in einem gleichseitigen Dreieck angeordnet und verankert sind. Es gibt ein mittleres Gelenk, das die Doppelarme miteinander verbindet. Es wurde untersucht, wie der Konfigurationsraum aufgebaut ist und wie er in Abhängigkeit von bestimmten Parametern aussieht. Die Arbeit beinhaltet weiterhin die Betrachtung des Konfigurationsraums als Fläche. Er kann als zwei verschiedene Flächentypen vorkommen. Daraus hergeleitet ist der zweite Teil der Arbeit, der sich mit dem Übergang dieser Flächentypen ineinander beschäftigt.

Abstract

The current scientific-practical work is dealing with the configuration space of a plain linkage, which can be regarded as a simplified version of a grabbing arm of a robot. It consists of three double cranks, which are arranged in an equilateral triangle and are anchored. There is a link in the middle, that connects the double cranks. The construction of the configuration space depending on certain parameters was investigated. Further, this work contains the analysis of the configuration space as a surface. This space can occur as *two* different types of 2-dimensional surfaces in 3-dimensional space. Due to this fact, the second part of the work considers the topological transformation of one type of surface into the other.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Der Konfigurationsraum des Gestänges	5
2.1	Das Modell	5
2.2	Abhängigkeit von den Parametern	8
2.2.1	Der Fall des konvexen Dreiecks	10
2.2.2	Der Fall des konkaven Dreiecks	12
2.2.3	Der Fall des Sechsecks	15
2.2.4	Zusammenfassung	15
2.3	Nomenklatur	16
2.4	Die Bewegung im Konfigurationsraum	17
3	Theoretische Grundlagen zu Flächen	18
3.1	Der Flächenbegriff	18
3.2	Der Simplicialkomplex	19
3.3	Die Eulersche Charakteristik	22
3.4	Die Einteilung der Flächen	23
4	Der Konfigurationsraum als Fläche	25
4.1	Nachweis der Flächeneigenschaften	25
4.2	Die Fläche vom Geschlecht 3	26
4.3	Die Sphäre	26
4.4	Die Frage nach dem Übergang	27
5	Theoretische Grundlagen zu Homotopieklassen	29
5.1	Kurven auf Flächen	29
5.2	Krümmung einer Fläche	30
6	Zwei Modelle des Übergangs	30
7	Die Geometrie des Konfigurationsraums	31
7.1	Die Krümmung	32
7.2	Die Metrik	34
8	Geodäten auf dem Konfigurationsraum	36
8.1	Eine Auswahl von Geodäten	36
8.2	Die kürzesten Geodäten	36
8.3	Beispiel für die Bewegung der Doppelarme entlang einer Geodäte	40
9	Die Übergänge	40
9.1	Der Übergang vom Sechseck zum konvexen Dreieck	40
9.2	Der Übergang vom Sechseck zum konkaven Dreieck	42
9.3	Zusammenfassung	42
10	Zusammenfassung und weiterführende Problemstellungen	42

1 Einleitung

Bevor ich zur eigentlichen Beschreibung meiner Aufgabe komme, möchte einem wichtigen Begriff meiner Arbeit einige Worte widmen - der *Topologie*. Vielleicht wissen einige, dass ein Topologist keinen Unterschied zwischen einem Doughnut und einem Becher macht. Aber was verbirgt sich eigentlich dahinter? Die Topologie ist einerseits ein wichtiger, aber relativ junger Zweig der Mathematik, der sich im Laufe des 19. Jhd. aus der Geometrie entwickelte. Sie befasst sich z.B. mit geometrischen Objekten im Raum und mit Räumen im Allgemeinen. Die Bedeutung der Topologie als mathematischer Begriff wird in dieser Arbeit später erläutert.

Im Rahmen dieser Facharbeit habe ich mich mit einem Problem aus der Topologie beschäftigt. Die Aufgabenstellung könnte man zunächst auf physikalisch-mechanischer Ebene folgendermaßen formulieren: Zuerst haben wir drei identische Doppelarme in der Ebene, die jeweils aus zwei Stangen – einer kleinen und einer großen – gebaut sind. Diese Doppelarme sind an dem Ende der großen Stange fest verankert, und zwar so, dass die drei Verankerungspunkte die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks ergeben würden. Die bisher freien Enden der Doppelarme werden nun aneinander befestigt, und zwar durch ein verbindendes Gelenk. Somit wird die Bewegungsfreiheit der Arme eingeschränkt, aber die kleinen Stangen sind immernoch zueinander flexibel. Man könnte sich vorstellen, dass diese Konstruktion für einen Roboterarm benutzt wird, der z.B. Objekte bis zu einer bestimmten Grösse zeichnen soll. Dazu wird an dem Gelenk, das die kleinen Stangen miteinander verbindet, ein Stift befestigt. Objekte welcher Form und welcher Grösse lassen sich nun mit diesem Stift zeichnen? Oder mit anderen Worten: Welche Bewegungsfreiheit hat der Punkt, in dem sich der Stift befindet? In welchem Raum kann er sich bewegen und wie ändert sich dieser, wenn z.B. die Längen der Stangen verändert wird? Diese Fragen zu analysieren und eine umfassende Charakterisierung dieses *Konfigurationsraums* zu erarbeiten war meine Aufgabe. Dabei hatte ich diesen Raum zunächst hauptsächlich auf äussere Merkmale untersucht, wie Aussehen und Form. Doch im Laufe der Arbeit habe ich mich immer mehr in die mathematischen Betrachtungen vertieft.

Am Anfang meiner Arbeitszeit war das volle Ausmaß der Problemstellung noch nicht zu sehen und ich befasste mich mit den möglichen Formen der ebenen Fläche, in dem sich der besagte Punkt bewegen kann, in Abhängigkeit von bestimmten Parametern. Weiterhin galt es, zu zeigen, dass der gesamte Konfigurationsraum als Fläche dargestellt werden kann, und die Klasse der Fläche mithilfe der Eulerschen Charakteristik zu berechnen. Dabei stellte sich heraus, dass der Konfigurationsraum nicht immer ein-und-dieselbe Fläche war, sondern in typischen Fällen eine Fläche vom Geschlecht 3 und in einigen Fällen eine Kugeloberfläche. Aus dieser Erkenntnis heraus, stellte sich ein neues Problem, nämlich wie es passieren kann, dass die Fläche vom Geschlecht 3 plötzlich ihre Henkel verliert und zur Kugeloberfläche wird. Um diesen Übergang zu beleuchten, musste ich bestimmte geschlossene Kurven (Geodäten) suchen, die sich dabei zusammenziehen. Am Ende entsprach die Lösung dieses Problems eleganterweise einem bekannten Modell. Diese Arbeit stellt meine Ergebnisse in der oben beschriebenen Reihenfolge ihrer Ausarbeitung dar.

Zwischen den Erläuterungen der Ergebnisse gebe ich zweimal einen Einblick in die notwendige Theorie. In Kapitel 3 geht es u.a. um Flächeneigenschaften und den Eulerschen Polyedersatz. Im nächsten theoretischen Teil (Kapitel 5) werden die Grundlagen zu den Homotopieklassen und auch zum Begriff der Krümmung dargelegt.

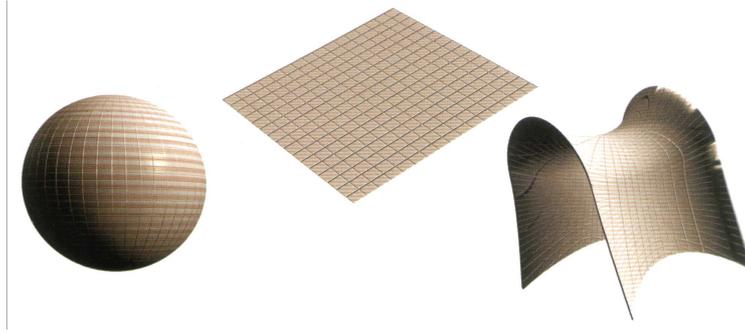


Abbildung 1: Hier sind drei Modelle der Raumzeit dargestellt. Zu dem ersten schreibt S. Hawking: *„Eine Hypothese ist die Kein-Rand-Bedingung, die Annahme, Zeit und Raum seien endlich und bildeten eine geschlossene Fläche ohne Rand, sowie die Oberfläche der Erde von endlicher Größe ist, aber keinen Rand besitzt.“*(siehe [3]). Die anderen beiden Modelle zeigen die Raumzeit einmal als Ebene und einmal als Sattelfläche.

Berechnungen, wie sie in dieser Arbeit angestellt wurden, können beispielsweise in der Physik und Robotertechnik verwendet werden. In der Mechanik und vor Allem in der Entwicklung von Robotern ist der berechnete Konfigurationsraum eines oder mehrerer Gelenke – wie in dem Gestänge – von Bedeutung. Nicht nur für eine zeichnende Konstruktion, an der meine Aufgabe erklärt wurde, sondern auch für alle möglichen Greifarme benötigt man eine ähnliche Analyse, wie in der vorliegenden Arbeit durchgeführt wurde. Gerade in der heutigen Zeit, in der alle Maschinen energetisch möglichst effizient sein müssen, sollte man wissen, ob man z.B. statt einen ganzen Greifarm zu bewegen, lieber bloß die „Fingergelenke“ etwas verschiebt.

Die topologische Analyse von Flächen im Allgemeinen findet heutzutage in vielen Naturwissenschaften, z.B. in der Astronomie und der Kosmologie, Anwendung. Besonders seit Albert Einsteins Relativitätstheorie und seiner Entdeckung der Raumzeit beschäftigen sich viele Wissenschaftler mit der Form, der Dimension und der Krümmung des Welt-raums. Viele Theorien wurden zu dieser Thematik entwickelt, die z.B. von dem Physiker Stephen Hawking beschrieben werden (Abb. 1), aber ein Großteil ist bisher unbewiesen. In diesem Bereich hat die Topologie weiterhin noch viel Raum für Anwendungen.

Obwohl für diese Arbeit eine konkrete praktische Anwendung denkbar ist, beinhaltet sie ausschließlich mathematisch-theoretische Betrachtungen.

2 Der Konfigurationsraum des Gestänges

2.1 Das Modell

Auf der Abbildung 2 ist ein Gestänge aus drei Doppelarmen zu sehen. Diese bestehen jeweils aus einer großen und einer kleinen Stange der Längen R und r und die festen Verankerungspunkte der großen Stangen sind in einem gleichseitigen Dreieck ABC angeordnet. Die Enden der kleinen Stangen sind durch ein Gelenk verbunden, ebenso wie jede große mit der zugehörigen kleinen Stange. In unseren Betrachtungen werden die Stangen als Strecken und die Gelenke als Punkte angesehen.

Der Raum den wir betrachten wollen, ist derjenige, in dem sich der mittlere Punkt O , also das verbindende Gelenk zwischen den kleinen Stangen, befinden kann. Der *Konfigurationsraum* hingegen beinhaltet sowohl die Position von O , als auch die verschiedenen möglichen Stellungen der Gelenke für die jeweilige Position.

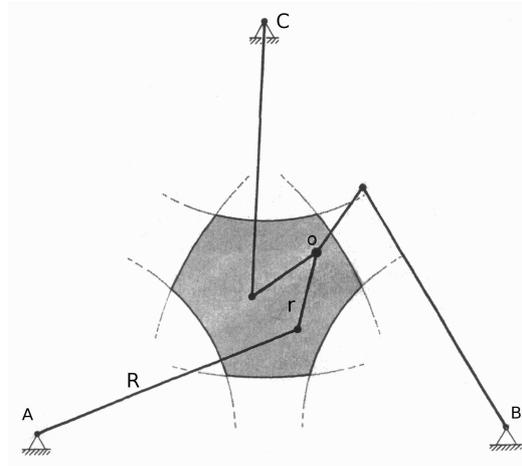


Abbildung 2: Die Projektion des Konfigurationsraums des Gestänges

Die Projektion dieses Konfigurationsraumes, bei der wir nur die Position des Punktes betrachten und die Stellungen der Gelenke außer Acht lassen, betrachten wir nun erst einmal für *ein* Doppelgelenk, wobei der interessante Punkt P sich in dem Ende der kleinen Stange befindet (Abb. 3). In diesem Fall kann sowohl die große als auch die kleine Stange eine volle Drehung ausführen, wobei sie immer in der Ebene bleiben muss. Die Stangen sind idealisiert, d.h. sie können sich gegenseitig und die Gelenke bei ihrer Bewegung durchkreuzen, ohne in die dritte Dimension ausweichen zu müssen. Den Verankerungspunkt der großen Stange nennen wir M . Nun beträgt der Abstand zwischen M und P mindestens $R - r$ und höchstens $R + r$. Die Projektion des Konfigurationsraumes, nennen wir sie *Konfigurationsblatt*, wird also durch die Radien $R + r$ und $R - r$ begrenzt.

Stellt man ihn in der Ebene graphisch dar, ergibt er einen 2-dimensionalen Ring. Da aber zu jeder Position von P der Doppelarm mathematisch positiv (Stellung „+“) oder negativ (Stellung „-“) in Bezug auf die Verbindungsstrecke zwischen M und P eingelenkt sein kann, gibt es zwei Konfigurationsblätter – zwei identische Ringe. Um aus der einen Stellung in die andere zu gelangen, also den Doppelarm zur anderen Seite einzurenken, muss er sich entweder maximal strecken oder die kleine Stange muss sich maximal

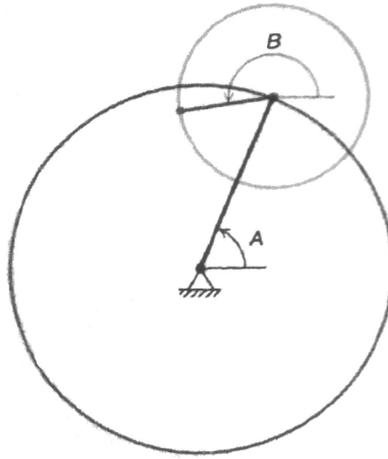


Abbildung 3: Die Bewegungsmöglichkeiten eines Doppelarms und ein zugehöriges Konfigurationsblatt.

einklappen, denn die Stangen dürfen ja nicht den \mathbb{R}^2 verlassen und einfach zur anderen Seite geklappt werden. Im maximal ausgestreckten bzw. maximal eingeklappten Zustand, befindet sich P am äußeren bzw. am inneren Rand des Ringes. Aus dieser Position kann sich der Doppelarm in jede der beiden Richtungen einrenken, das heißt, an den Rändern kann man von einem Konfigurationsblatt in das andere gelangen. Die Ränder der beiden

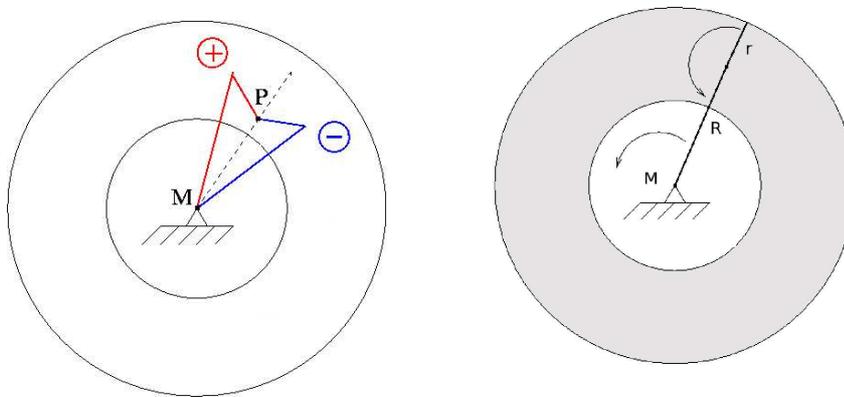


Abbildung 4: *Links:* Zu einer Position von P gibt es jeweils zwei mögliche Stellungen des Doppelarms. *Rechts:* Durch maximales Ausstrecken bzw. Einklappen kann der Doppelarm seinen Einrenkungssinn ändern.

Blätter werden also miteinander identifiziert und wir erhalten den gesamten Konfigurationsraum des Doppelarms, der aus 2 Flächen, 2 gekrümmten Kanten und 0 Ecken besteht. Damit ist die *Eulersche Charakteristik*: $\chi = 0 - 2 + 2 = 0$ (siehe Kapitel 3.3). An dieser Stelle muss ich auf die folgenden Kapitel vorgreifen und verraten, dass diese Eulersche Charakteristik der Gesamtfläche mit der des Torus übereinstimmt. Bildlich kann man sich vorstellen, dass die beiden Ringe an den Rändern zusammengenäht werden und der Hohlraum zwischen ihnen mit Luft aufgepumpt wird.

Etwas schwieriger wird es nun bei dem Gestänge. Die großen und die kleinen Stangen haben weniger Bewegungsfreiheit und können sich nur noch innerhalb eines bestimmten Winkels bewegen. In typischen Fällen kann sich der Punkt O innerhalb eines Sechsecks mit gekrümmten Seiten bewegen (siehe Abb. 2). Die anderen Fälle werden später beleuchtet. Die Form des Konfigurationsblattes ist u.a. von den Parametern R und r abhängig. Die bestimmenden Radien sind wieder $R + r$, der im Sechseck die konvexen Seiten, und $R - r$, der die konkaven Seiten ergibt. Diesmal kann für jede Position von O jeder der drei Doppelarme mathematisch positiv oder negativ eingenenkt sein (siehe Abb. 5b). Also gibt es $2^3 = 8$ Möglichkeiten der Stellung der Arme für jede Position von O und damit 8 Konfigurationsblätter. Wenn sich O auf einer der Kanten des Sechsecks befindet, ist immer ein bestimmter Doppelarm entweder maximal ausgestreckt oder maximal eingenenkt. Das bedeutet, dass man wieder über eine Kante in ein anderes Konfigurationsblatt gelangen kann. In einer Ecke ist immer jeweils ein Doppelarm maximal eingenenkt und ein Doppelarm maximal ausgestreckt. Beide haben die Möglichkeit, sich math. positiv oder negativ einzurenken, d.h. in einer Ecke treffen $2^2 = 4$ Konfigurationsblätter aufeinander.

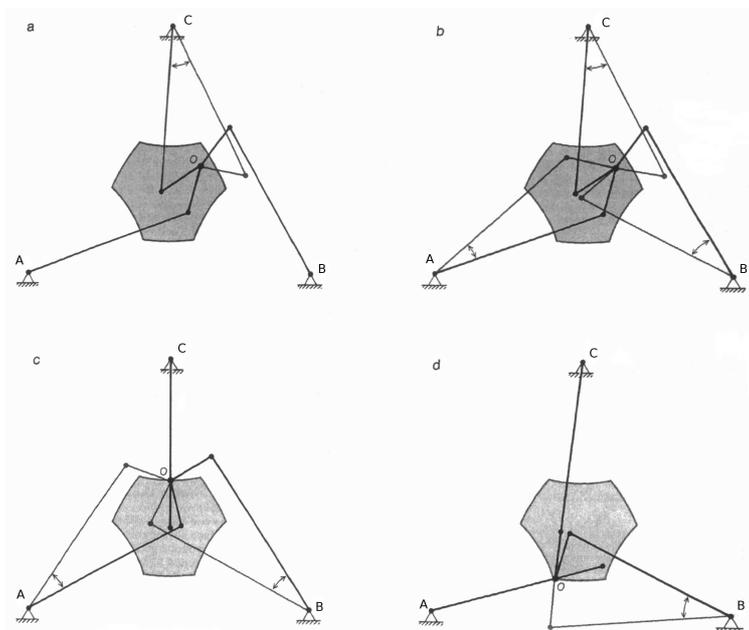


Abbildung 5:

- a - ein Doppelarm kann math. positiv oder negativ eingenenkt sein
- b - das gilt natürlich für alle drei
- c - an einer konkaven Seite ist einer der Doppelarme maximal eingenenkt
- d - in einer Ecke ist ein Doppelarm maximal eingenenkt und einer maximal ausgestreckt

2.2 Abhängigkeit von den Parametern

Da die Basispunkte A, B, C sich wie die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks anordnen, braucht man eine Grösse, die dieses Dreieck bestimmt. Man könnte natürlich die Seitenlänge L des Dreiecks ABC als Parameter nehmen, jedoch hat diese wenig mit dem Konfigurationsraum zu tun. Deshalb ist es sinnvoller den Umkreisradius L_R zu nehmen, also die Entfernung der Eckpunkte vom Mittelpunkt. Die wichtigen Parameter sind demnach R, r und L_R .

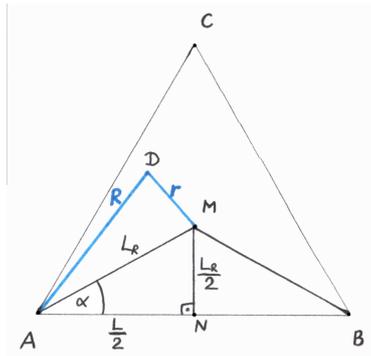


Abbildung 6:

Nun stellt sich die Frage, ob der Konfigurationsraum X überhaupt immer, d.h. für alle $R, r, L_R \in \mathbb{R}^+$, existiert und ob er stets die Form eines Sechsecks mit gekrümmten Seiten hat. Auf beide Fragen lautet die Antwort nein. Lässt man den Parameter L_R konstant und verändert nur R und r , mit $R > r$, so ergeben sich 7 Möglichkeiten:

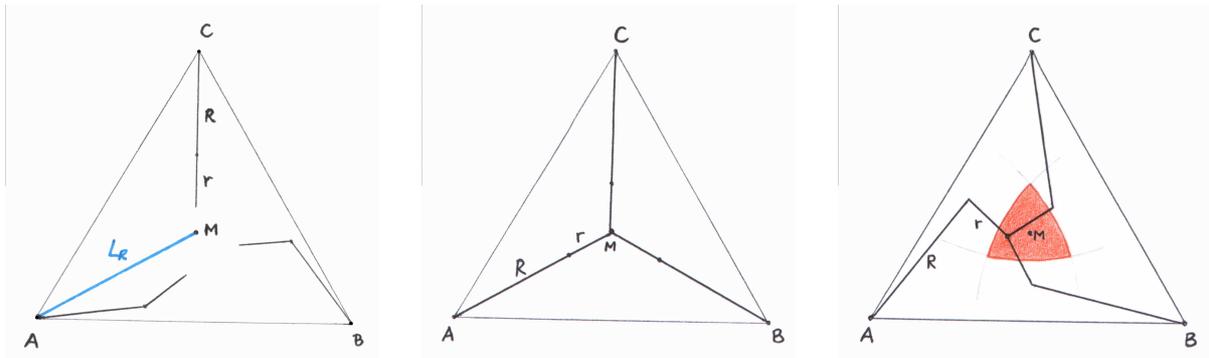


Abbildung 7: Die Fälle 1 bis 3.

1. R und r sind so klein, dass $R + r < L_R$. Das bedeutet, dass die Doppelarme sich gar nicht treffen und dass $X = \emptyset$ (der Konfigurationsraum existiert nicht).
2. $R + r$ ist gerade so gross wie L_R und die Doppelarme treffen sich im Mittelpunkt des Dreiecks ABC . Allerdings hat diese Konstellation keine Bewegungsmöglichkeiten, also besteht X nur aus einem Punkt.
3. R und r sind so, dass die Form des Konfigurationsblattes nur von $R + r$ bestimmt wird. Es entsteht ein Dreieck mit konvexen Seiten.

4. Hier sieht man das Sechseck mit 3 konkaven und 3 konvexen Seiten.
5. In diesem Fall wird das Konfigurationsblatt nur von $R - r$ bestimmt. Man erhält ein Dreieck mit konkaven Seiten.
6. Die Situation ist ähnlich wie bei 2.: X besteht aus einem Punkt.
7. $X = \emptyset$, denn die Stangen sind zu lang.

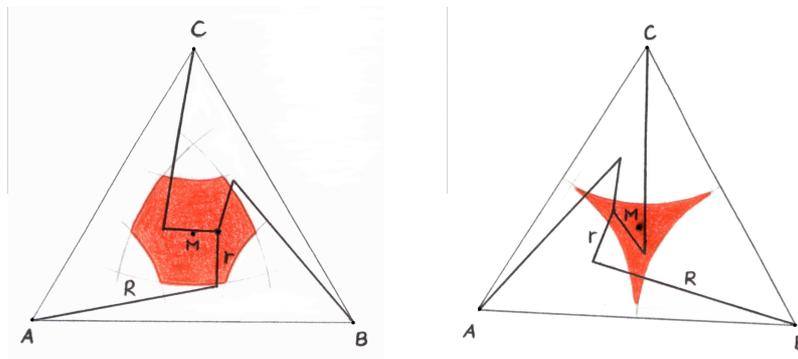


Abbildung 8: Die Fälle 4 und 5 (v.l.).

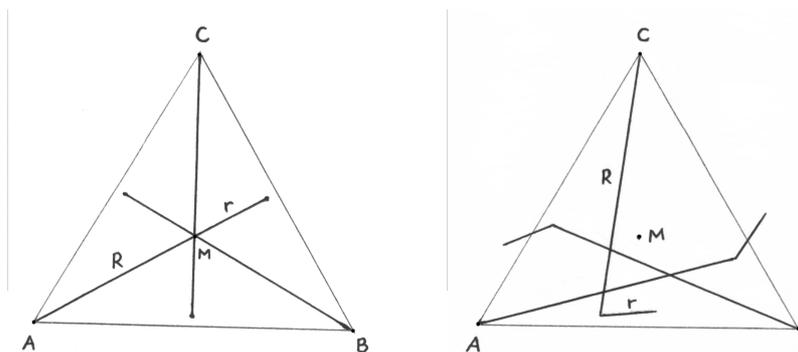


Abbildung 9: Die Fälle 6 und 7.

Die Fälle 1, 2 und 6, 7 sind nicht weiter von Bedeutung und werden im Folgenden nicht betrachtet. Die Fälle 3 bis 5, ihre Konfigurationsräume und insbesondere die Übergänge vom konkaven bzw. konvexen Dreieck zum Sechseck sollen genauer untersucht werden. Zuerst müssen wir herausfinden, wie die Form des Konfigurationsblattes von den Parametern R , r und L_R abhängt.

Im Voraus können einige Nebenbedingungen aufgestellt werden, die sich aus dem Modell ergeben. Erst einmal bilden die Strecken R , r und L_R immer ein Dreieck – $\triangle AMD$, ausser, wenn der Konfigurationsraum nur aus einem Punkt besteht oder die leere Menge ist. Letztere sind aber Ausnahmefälle. In diesem Dreieck gelten folgende Dreiecksungleichungen zwischen den Parametern:

$$R + r > L_R, \quad (2.1)$$

$$L_R + R > r, \quad (2.2)$$

$$L_R + r > R. \quad (2.3)$$

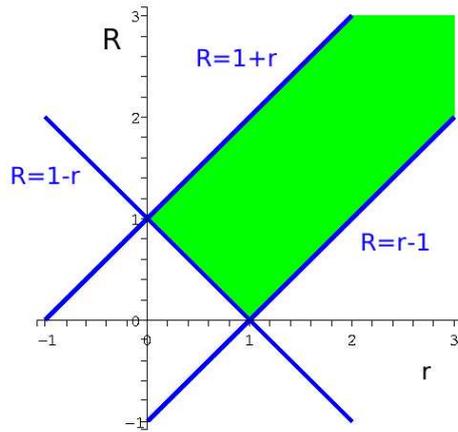


Abbildung 10: Der grüne Bereich ist durch die Dreiecksungleichungen ?? mit $L_R = 1$ begrenzt. Nur dort dürfen sich die Paare (r, R) aufhalten.

Weiterhin, können wir in der Abb.10 das Dreieck $\triangle ANM$ erkennen, in dem ein Zusammenhang zwischen der Seitenlänge L und dem Umkreisradius L_R aufgestellt werden kann. In einem gleichseitigen Dreieck ist der Umkreisradius gleichzeitig die Winkelhalbierende, deshalb ist der Winkel $\alpha = 30^\circ$. Weiterhin gilt: $\overline{MN} = \sin(30^\circ)L_R = \frac{L_R}{2}$. Die Ankathete von α ist $\frac{L}{2}$. In diesem Dreieck wendet man jetzt den Satz des Pythagoras an und kommt darauf, dass $L_R = \frac{L}{\sqrt{3}}$ bzw. $L = \sqrt{3}L_R$.

Wie schon erwähnt, gelten die oberen Aussagen für $R > r$ und $R, r, L_R \in \mathbb{R}^+$, aber sowohl für die dreieckigen als auch für die sechseckigen Konfigurationsblätter. Nun widmen wir uns den Bedingungen für die verschiedenen Konfigurationsblättern.

2.2.1 Der Fall des konvexen Dreiecks

Wie schon bekannt ist, ergeben sich die konvexen Seiten eines Konfigurationsblattes immer aus den drei Bögen vom Radius $R + r$, egal welche Form es hat. Auch bei dem Sechseck haben wir zunächst ein konvexes Dreieck. Dann werden aber die Ecken dieses Dreiecks durch die Bögen vom Radius $R - r$ praktisch “abgeschnitten”, sodass ein Sechseck entsteht. Das Konfigurationsblatt bleibt aber ein konvexes Dreieck, wenn $R - r$ dessen Ecken nicht erreicht bzw. gerade noch erreicht. Das bedeutet, dass die Länge $R - r$ kleiner bzw. gleich L_R minus eine bestimmte Strecke δ sein muss, wobei δ dem Umkreisradius des konvexen Dreiecks entspricht.

$$R - r \leq L_R - \delta \tag{2.4}$$

Die Strecke δ lässt sich natürlich durch die drei Parameter ausdrücken. Dazu benutzen wir

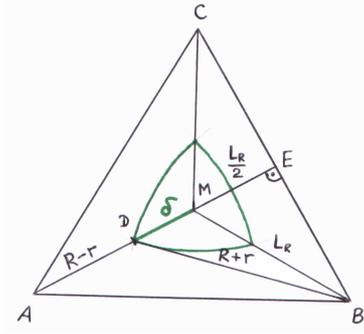


Abbildung 11: Das konvexe Dreieck.

wieder den Satz des Pythagoras im Dreieck $\triangle DBE$ und ersetzen $\frac{L}{2}$ durch $\frac{\sqrt{3}}{2}L_R$.

$$\begin{aligned}
 (R+r)^2 &= \left(\frac{L_R}{2} + \delta\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{L_R}{2} + \delta\right)^2 + \frac{3}{4}L_R^2 \\
 \left(\frac{L_R}{2} + \delta\right)^2 &= (R+r)^2 - \frac{3}{4}L_R^2 \\
 \delta &= \sqrt{(R+r)^2 - \frac{3}{4}L_R^2} - \frac{L_R}{2}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Bemerkung: Die Wurzel bei 2.5 ist wohldefiniert, denn:

$$\begin{aligned}
 (R+r)^2 - \frac{3}{4}L_R^2 &\geq 0 \\
 (R+r)^2 &\geq \frac{3}{4}L_R^2 \\
 R+r &\geq \frac{\sqrt{3}}{2}L_R \\
 &\rightarrow \text{wahre Aussage, denn } R+r > L_R.
 \end{aligned}$$

Nun können wir δ (Ungl. 2.5) in die Ungleichung 2.4 einsetzen und vereinfachen:

$$\begin{aligned}
 R-r &\leq \frac{3}{2}L_R - \sqrt{(R+r)^2 - \frac{3}{4}L_R^2} \\
 \sqrt{(R+r)^2 - \frac{3}{4}L_R^2} &\leq \frac{3}{2}L_R - (R-r) \\
 (R+r)^2 - \frac{3}{4}L_R^2 &\leq \frac{9}{4}L_R^2 - 3L_R(R-r) + (R+r)^2 \\
 3L_R^2 - 3L_R(R-r) - 4Rr &\geq 0
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Diese Ungleichung ist also die Bedingung für ein konvexes Dreieck. Nun wäre es praktisch, sie nach einer der Variablen umzustellen, zum Beispiel R . Nach dem Umstellen, erhalten wir:

$$R \leq \frac{3L_R(L_R + r)}{3L_R + 4r} \quad r \neq -\frac{3}{4}L_R$$

Um sich diese Ungleichung veranschaulichen zu können, muss man annehmen, dass L_R konstant ist, z.B. setzt man $L_R = 1$. So können wir R nur in Abhängigkeit von r darstellen:

$$R \leq \frac{3(1+r)}{3+4r}. \quad (2.7)$$

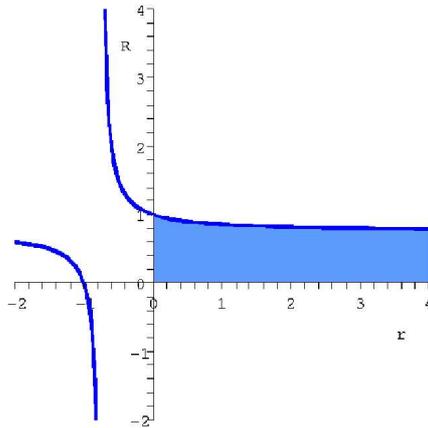


Abbildung 12: Hier ist die Ungleichung 2.7 dargestellt, dabei ist $R > 0$ und $r > 0$. Die Funktion hat eine Polstelle bei $r = -\frac{3}{4}$, aber sie ist nicht im Definitionsbereich des Konfigurationsraums. Wählt man ein (R,r) -Paar aus dem blauen Bereich, erhält man ein konvexes Dreieck als Konfigurationsblatt.

2.2.2 Der Fall des konkaven Dreiecks

Bei dem konkaven Dreieck ist die Bedingung ähnlich wie bei dem konvexen, aber diesmal muss der Radius $R + r$ grösser bzw. gleich L_R plus ein bestimmtes δ sein. Die Strecke δ entspricht hier dem Inkreisradius des konkaven Dreiecks.

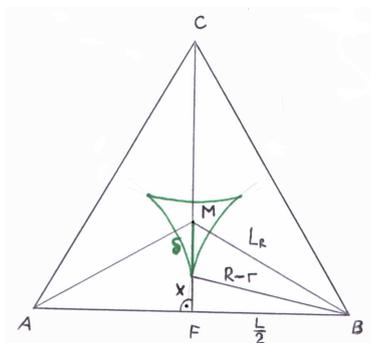


Abbildung 13: Das konkave Dreieck.

$$R + r \geq L_R + \delta \quad (2.8)$$

Hier müssen wir, bevor wir δ ausrechnen können, zuerst die Strecke x durch die Parameter R , r und L_R ausdrücken. Hierfür wird wieder der Satz des Pythagoras im Dreieck $\triangle FBM$ verwendet.

$$\begin{aligned} (R - r)^2 &= x^2 + \frac{L^2}{4} = x^2 + \frac{3}{4}L_R^2 \\ x &= \sqrt{(R - r)^2 - \frac{3}{4}L_R^2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Bemerkung: Die Wurzel bei 2.9 ist wohldefiniert, wenn gilt:

$$\begin{aligned} (R - r)^2 - \frac{3}{4}L_R^2 &\geq 0 \\ (R - r)^2 &\geq \frac{3}{4}L_R^2 \\ R - r &\geq \frac{\sqrt{3}}{2}L_R \\ R &\geq \frac{\sqrt{3}}{2}L_R + r. \end{aligned}$$

Wie in der Abb. 13 zu sehen ist, gilt $\delta = \frac{L_R}{2} - x$. In diese Gleichung setzen wir nun die Gleichung 2.9 für x ein und bekommen δ in Abhängigkeit von den Parametern.

$$\delta = \frac{L_R}{2} - x = \frac{L_R}{2} - \sqrt{(R - r)^2 - \frac{3}{4}L_R^2}$$

Jetzt setzen wir δ in die Ungleichung 2.8 ein und erhalten die Bedingung für ein konkaves Dreieck.

$$\begin{aligned} R + r &\geq \frac{3}{2}L_R - \sqrt{(R - r)^2 - \frac{3}{4}L_R^2} \\ -3L_R^2 + 3L_R(R + r) - 4Rr &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Beim Umstellen nach der Variable R ergeben sich zwei Fälle mit unterschiedlichem Relationszeichen:

$$\begin{aligned} 1) R &\geq \frac{3L_R(L_R - r)}{3L_R - 4r} && \text{für } r < \frac{3}{4}L_R, \\ 2) R &\leq \frac{3L_R(L_R - r)}{3L_R - 4r} && \text{für } r > \frac{3}{4}L_R. \end{aligned}$$

Zur Veranschaulichung dieser zwei Ungleichungen setzen wir auch hier $L_R = \text{konst.}$, z.B. $L_R = 1$. Nun erhalten wir:

$$\begin{aligned} 1) R &\geq \frac{3(1 - r)}{3 - 4r} && \text{für } r < \frac{3}{4}, \\ 2) R &\leq \frac{3(1 - r)}{3 - 4r} && \text{für } r > \frac{3}{4}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

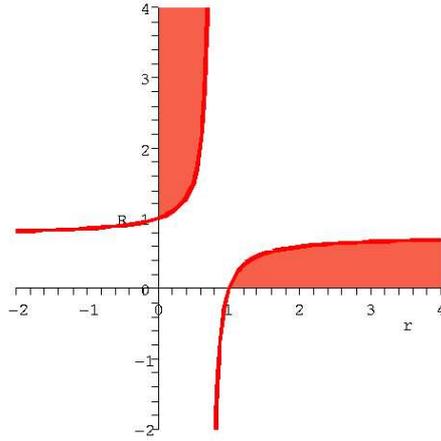


Abbildung 14: Hier ist die Ungleichung 2.11 im 1. Quadranten dargestellt. Die Funktion hat bei $r = \frac{3}{4}$, deshalb wird der Wert aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen. Wählt man ein (R,r) -Paar aus dem roten Bereich, erhält man ein konkaves Dreieck.

Es gibt noch eine andere Menge von Konfigurationen, die ein konkaves Dreieck ergibt. Es gibt Fälle, in denen die Radien so sind, dass man ein konkaves Dreieck und noch drei kleine Dreiecke erhält, die nicht mit diesem verbunden sind (siehe Abb. 15). Diese kleinen Dreiecke sind von dem konkaven Dreieck aus nicht erreichbar und damit ergibt diese Konfiguration praktisch auch ein konkaves Dreieck als Konfigurationsblatt. Solche Fälle treten unter ganz bestimmten Bedingungen ein. Die erste ist, dass die Radien so gewählt werden müssen, dass ein sechseckiges Konfigurationsblatt mit dem selben $R + r$ sich zum Teil außerhalb des Dreiecks ABC befinden würde.

Der Grenzfall ist eine solche Konfiguration, bei der jeweils zwei Ecken des Sechsecks auf einer Seite des Dreiecks liegen. Hier kann man im Dreieck ... den Kosinussatz mit einer größer-Relation aufstellen:

$$\begin{aligned}
 (R + r)^2 &\geq (R - r)^2 + 3L_R^2 - 2(R - r) \cdot \sqrt{3}L_R \cdot \cos 60^\circ \\
 (R + r)^2 &\geq (R - r)^2 + 3L_R^2 - (R - r) \cdot \sqrt{3}L_R \\
 R^2 + 2Rr + r^2 &\geq R^2 - 2Rr + r^2 + 3L_R^2 - (R - r) \cdot \sqrt{3}L_R \\
 4Rr + \sqrt{3}L_R \cdot R &\geq 3L_R^2 + \sqrt{3}L_R \cdot r \\
 R(4r + \sqrt{3}L_R) &\geq 3L_R^2 + \sqrt{3}L_R \cdot r \\
 R &\geq \frac{3L_R^2 + \sqrt{3}L_R \cdot r}{4r + \sqrt{3}L_R}.
 \end{aligned}$$

Zusätzlich zu dieser Bedingung muss auch gelten, dass $R - r$ größer ist, als die halbe Seitenlänge des Dreiecks ABC :

$$R - r > \frac{\sqrt{3}}{2}L_R.$$

Wenn das Gleichheitszeichen gelten würde, wären die drei kleinen Dreiecke mit dem mittleren noch jeweils durch einen Punkt verbunden und wir hätten ein Sechseck.

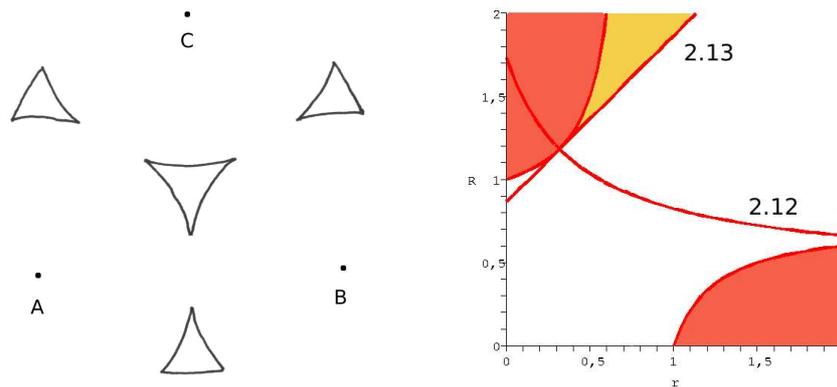


Abbildung 15: Die Konfiguration mit einem konkaven Dreieck und drei davon getrennten Dreiecken zählt auch zu den konkaven Dreiecken.

2.2.3 Der Fall des Sechsecks

Die Bedingung bzw. Bedingungen für ein Sechseck kann man einfach aus den Bedingungen für die Dreiecke herleiten. Wenn $R - r > L_R - \delta_1$ und gleichzeitig $R + r < L_R + \delta_2$, entsteht ein Sechseck. Es müssen also die Ungleichungen (1-3) mit jeweils umgekehrtem Relationszeichen gelten:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 3L_R^2 - 3L_R(R - r) - 4Rr < 0 \\ 2) \quad & -3L_R^2 + 3L_R(R + r) - 4Rr < 0 \end{aligned}$$

Stellt man diese nach R um, sieht man, dass die Fallunterscheidung diesmal nicht notwendig ist. Der Fall für $r > \frac{3}{4}L_R$ bei 2) ist schon in 1) enthalten. Es muss gelten:

$$\begin{aligned} 1) \quad & R > \frac{3L_R(L_R + r)}{3L_R + 4r} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}, r \neq -\frac{3}{4}L_R \\ 2) \quad & R < \frac{3L_R(L_R - r)}{3L_R - 4r} \quad \text{für } r < \frac{3}{4}L_R. \end{aligned}$$

2.2.4 Zusammenfassung

Um einen Gesamtüberblick über die Abhängigkeit der drei Formen der Konfigurationsblätter von Parametern zu erhalten, stellen wir alle Ungleichungen zusammen graphisch dar (Abb. 16). Dazu benutzen wir wie in den vorigen Beispielen $L_R = 1$. Allerdings tritt ein Problem auf: für $r > 1$ überschneiden sich die Bereiche des konkaven und des konvexen Dreiecks, was logisch gesehen nicht möglich ist. Dabei kommt uns die Bedingung $R > r$ zu Hilfe. Stellen wir sie auch graphisch dar, fällt der Teil mit der Überlappung weg und wir erhalten einen Bereich, in dem alle drei Formen des Konfigurationsblattes zu sehen sind. Um von dem Bereich des konkaven in den des konvexen Dreiecks zu gelangen, muss der Bereich des Sechsecks überquert werden. Das entspricht auch den physikalischen Überlegungen: man kann ausgehend von einem konvexen Dreieck durch Vergrößerung des Radius $R - r$ nicht sofort ein konkaves Dreieck bekommen, ohne zwischendurch ein Sechseck als Konfigurationsraum zu erhalten, und umgekehrt.

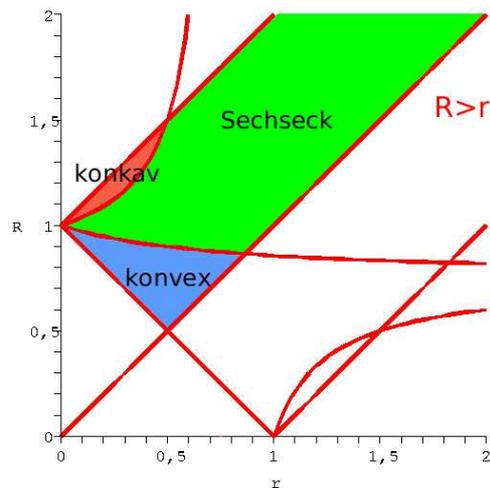


Abbildung 16: Das endgültige Phasendiagramm mit den Bereichen des Sechsecks, des konkaven und des konvexen Dreiecks. Es gilt: $r, R \in \mathbb{R}$ und $R > r$.

2.3 Nomenklatur

Zu jedem Punkt, den das Gestänge erreichen kann gibt es 8 mögliche Stellungen der Gelenke, denn jeder Doppelarm kann in Bezug auf die Verbindungsstrecke zwischen dem jeweiligen Verankerungspunkt und O mathematisch positiv oder negativ eingerenkt sein. Zu jeder Stellung der 3 Doppelarme gehört demnach ein Sechs- bzw. Dreieck. Um diese auseinander halten zu können, müssen sie auf irgendeine Weise durchnummeriert werden. Dazu wird der Einrenkungssinn von jedem Doppelgelenk registriert – ist es math. positiv eingerenkt, wird ein „+“ eingetragen, ist es math. negativ eingerenkt, ein „-“. So entsteht zu jedem Sechs- bzw. Dreieck jeweils ein Vorzeichentripel, wobei das erste Vorzeichen zu dem Doppelgelenk A gehört, das zweite zum Doppelgelenk B und das dritte zum Doppelgelenk C.

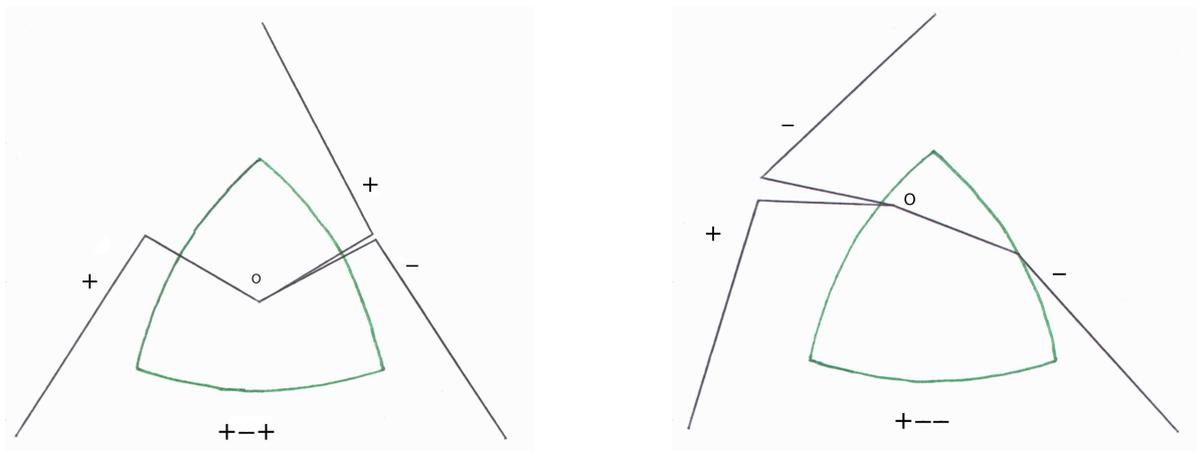


Abbildung 17: Hier zwei Beispiele für die Benennung der Konfigurationsblätter.

Auf diese Weise sieht man an der Stellung der Doppelarme in welchem Sechs- bzw. Dreieck sich O gerade befindet (Abb. 17) und kann sich einen genauen Überblick darüber verschaffen, welche Konfigurationsblätter an welche grenzen und wie.

2.4 Die Bewegung im Konfigurationsraum

Solange sich O innerhalb eines Konfigurationsblattes bewegt, behalten die Doppelarme ihren Einrenkungssinn und nur die Winkel zwischen den Stangen ändern sich. Um diesen zu ändern gibt es mehrere Möglichkeiten. Wir betrachten zunächst den Fall mit dem dreieckigen Konfigurationsblatt, wobei man unterscheiden muss, ob die Seiten konvex oder konkav sind.

Um den Einrenkungssinn *eines* Doppelarms in einem konvexen Dreieck zu ändern, muss man ihn ausstrecken, sodass sein Ende sich auf der seinem Verankerungspunkt gegenüberliegenden Kante befindet. Dann gelangt man, durch Einrenken des Doppelarms in die andere Richtung, in ein anderes Dreieck, dessen Tripel sich in genau einem Vorzeichen von dem Tripel des Ausgangsdreiecks unterscheidet, nämlich in dem Vorzeichen des anders eingerenkten Doppelgelenks. In einem konkaven Dreieck besteht der Unterschied nur dadurch, dass man den Doppelarm nicht ausstrecken sondern einklappen muss.

Um den Einrenkungssinn von zwei Doppelgelenken gleichzeitig zu ändern, müssen beide ausgestreckt werden, so dass sich der Punkt O in der Ecke befindet, die den Verankerungspunkten der beiden Doppelgelenke gegenüber liegt. Von hier aus haben die Gelenke vier Möglichkeiten: erstens können sie natürlich in ihre Anfangsstellung zurückgehen, zweitens können sich beide in die andere Richtung einrenken, drittens kann das erste Gelenk den Einrenkungssinn ändern und das zweite nicht und vierstens andersherum. In einer Ecke grenzt das Ausgangsdreieck also an 3 weitere. Dabei hat es mit zwei dieser Dreiecke auch eine Kante gemeinsam, und zwar die, die sich rechts bzw. links von der Ecke befindet. Beim Übergang in eines dieser beiden Dreiecke ändert sich nur ein Vorzeichen. Mit dem dritten Dreieck hat das Ausgangsdreieck aber nur diese eine Ecke gemeinsam. Beim Übergang ändern sich zwei Vorzeichen des Tripels. Bei einem konkaven Dreieck müssen die beiden Doppelarme wiederum einklappen werden und O befindet sich dann in der Ecke zwischen den Verankerungspunkten. Die Bewegungsmöglichkeiten sind analog zu den oben beschriebenen.

In einem sechseckigen Konfigurationsblatt gehört zu jedem Doppelarm eine konkave und eine konvexe Seite. Es gibt also zwei Möglichkeiten seinen Einrenkungssinn zu ändern: entweder er wird ausgestreckt, wobei sich O auf der zugehörigen konvexen Seite befindet, oder er wird eingeklappt und O ist auf der konkaven Seite. Nach beiden Übergängen befindet sich O aber im gleichen Sechseck, das sich wieder in einem Vorzeichen des Tripels vom Ausgangssechseck unterscheidet. Das heißt, zwei Sechsecke sind immer an zwei Kanten miteinander „verklebt“, nämlich an denen, die sich gerade gegenüberliegen.

Über eine Ecke kann man wieder den Einrenkungssinn von zwei Doppelarmen ändern und es treffen sich dort auch immer vier Konfigurationsblätter. Es gibt aber für je zwei Doppelarme zwei zugehörige Ecken. Die erste ist zwischen der konkaven Seite des ersten und der konvexen Seite des zweiten Doppelarms. Die zweite ist logischerweise zwischen der konvexen Seite des ersten und der konkaven Seite des zweiten Doppelarms. Wenn sich O in der ersten Ecke befindet ist der erste Doppelarm eingeklappt und der zweite ausgestreckt. In der zweiten ist es umgekehrt.

3 Theoretische Grundlagen zu Flächen

3.1 Der Flächenbegriff

Bevor wir den Konfigurationsraum des Drei-Doppelarm-Systems als Fläche charakterisieren können, ist es notwendig, zuerst den Begriff „Fläche“ zu beleuchten. Welche Eigenschaften muss ein Objekt haben, um eine Fläche zu sein, und wie kann man diese klassifizieren? Um diese Fragen zu klären, führen wir zunächst eine anschauliche Flächendefinition ein: Eine Fläche sieht lokal aus wie eine Kreisscheibe (siehe Abb. 18). Dazu ergänzen wir, dass



Abbildung 18: Dieser Torus (links) ist eine Fläche, da jede Umgebung wie eine Kreisscheibe aussieht (z.B. die schraffierte Kreisfläche auf dem Bild). Der Körper rechts jedoch, der aus zwei Kegeln ohne Grundfläche besteht, ist keine Fläche. An der Stelle, an der die beiden Kegel sich berühren, kann man eine beliebig kleine Umgebung *nicht* durch eine Kreisscheibe ersetzen.

es auf einer Fläche möglich sein muss, lokal ein Koordinatensystem anzugeben. Weiterhin sei es erlaubt, dass sie Knicke besitzt, d.h. nicht glatt ist. Eine glatte Fläche wäre z.B. die Oberfläche einer Kugel, also eine Sphäre. Auf dieser lässt sich ein stetig verlaufendes (differenzierbares) Koordinatensystem angeben, außer an den Polen, das keine sprunghaften Richtungsänderungen eines Vektors beinhaltet. Das ist z.B. auf der Oberfläche eines Würfels nicht der Fall, deshalb ist diese nicht glatt (siehe Abb. 19).

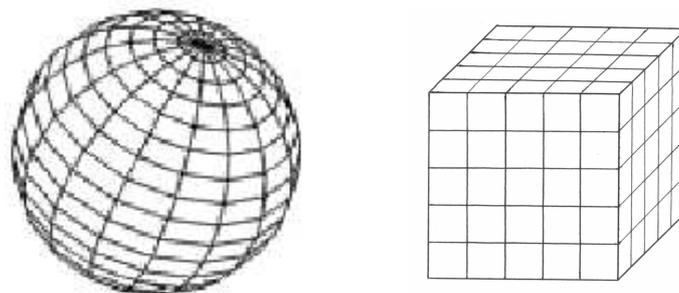


Abbildung 19: Eine Sphäre und eine Würfeloberfläche mit Koordinatensystem.

Beide sind in unserem Sinne Flächen und topologisch gesehen sind sie sogar als gleich zu betrachten. Die Würfeloberfläche \mathbb{W} ist äquivalent zur Sphäre \mathbb{S}^2 , obwohl sie unterschiedliche Darstellungen besitzen

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

$$\mathbb{W} = A \cup B \cup C, \text{ mit}$$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, |y| = 1, |z| \leq 1\}$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| = 1\}.$$

Diese beiden Flächen sind in den dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 eingebettet, aber das trifft nicht auf alle Flächen zu (siehe Abb. 26). Die Beziehung zwischen der Würfeloberfläche und der Sphäre lässt sich mit dem Begriff der topologischen Äquivalenz oder des Homöomorphismus erklären, zu dem wir nun kommen. Allgemein heißen zwei Mengen X und Y homöomorph zueinander, wenn es eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gibt, wobei f und f^{-1} stetig sind. Diese Abbildung heißt dann *Homöomorphismus*. Eine bijektive Abbildung ist diejenige, welche jedem Element der Menge X genau ein Element der Menge Y zuordnet und umgekehrt (Eineindeutigkeit). Auf zwei Flächen übertragen, lautet die Definition folgendermaßen:

Definition 3.1 *Zwei Flächen sind homöomorph, wenn zwischen ihnen ein Homöomorphismus (bijektive Abbildung) besteht.*

Zwischen den oben betrachteten Flächen besteht also ein Homöomorphismus. Eine Möglichkeit, diese ineinander zu überführen, zeigt die Abbildung 20. Hier werden die Punkte auf der Würfeloberfläche durch Projektion vom Mittelpunkt M des Würfels zu Punkten auf der Kugeloberfläche.

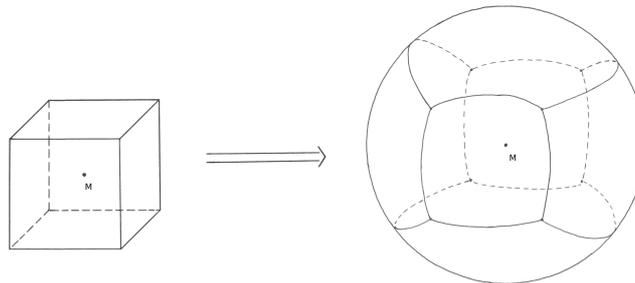


Abbildung 20: Ein möglicher Homöomorphismus zwischen der Würfel- und der Kugeloberfläche.

Bei dieser Projektion stellt sich die Frage, was mit den Kanten und Ecken passiert, denn eine Kugeloberfläche besitzt weder das eine noch das andere. Aber darauf werden wir später noch zu sprechen kommen.

3.2 Der Simplicialkomplex

Eine Fläche lässt sich in Simplices zerlegen. Zum Beispiel besteht die Würfeloberfläche aus acht 0-Simplices, zwölf 1-Simplices und sechs 2-Simplices. Offensichtlich stimmen diese Zahlen mit den Anzahlen der Ecken, Kanten und Seiten überein. Demnach entspricht zum Beispiel der 1-Simplex einer Kante, also einem Geradenstück. Nach Definition ist ein 1-Simplex Δ^1 die Menge aller Punkte (x_0, x_1) ^a, die zum \mathbb{R}^2 gehören, für die gilt, dass x_0

^aIn diesem Fall entspricht x_0 der x-Koordinate und x_1 der y-Koordinate in der Ebene

und x_1 stets größer bzw. gleich 0 sind und die Summe der Koordinaten in jedem Punkt 1 ergibt (Abb. 21).

$$\Delta^1 = \{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \mid x_i \geq 0 \ \forall \ 0 \leq i \leq 1 \ \wedge \ x_0 + x_1 = 1\}$$

Ein Standardsimplex der Dimension n (Abb. 22) lässt sich folgendermaßen darstellen:

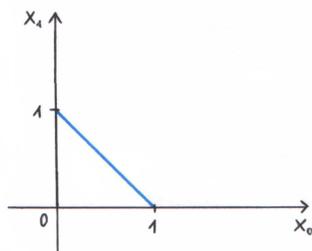


Abbildung 21: Der Δ^1 entspricht der Funktion $x_1 = 1 - x_0$ im Intervall $[0;1]$.

$$\Delta^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0 \ \forall \ 0 \leq i \leq n \ \wedge \ x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1\}$$

Der n -Simplex ist die Menge aller Punkte mit den Koordinaten (x_0, x_1, \dots, x_n) im $(n+1)$ -dimensionalen Raum, für die gilt, dass alle x_i mit $0 \leq i \leq n$ größer bzw. gleich 0 sind und die Summe der Koordinaten in jedem Punkt gleich 1 ist. Ein allgemeiner n -Simplex ist ein

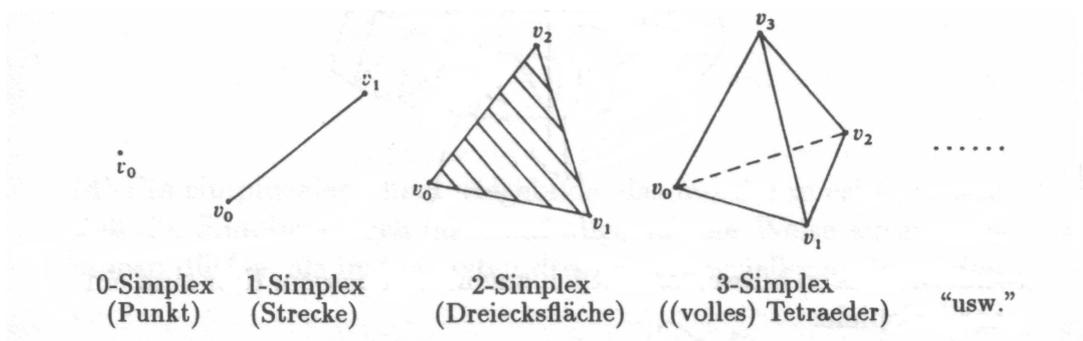


Abbildung 22: Hier einige Standardsimplices.

topologischer Raum, welcher zu Δ^n homöomorph ist. Um auf das Beispiel des 1-Simplex zurückzukommen, ist jedes Geradenstück homöomorph zu Δ^1 , also ein allgemeiner 1-Simplex.

Definition 3.2 Ein topologischer Raum ist ein Paar (X, O) , bestehend aus der Menge X und einer Menge O von Teilmengen von X (genannt offene Mengen), für die gilt:

1. Beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind offen.
2. Der Durchschnitt von je zwei offenen Mengen ist offen.

3. \emptyset und X sind offen.

Man nennt O die *Topologie* des topologischen Raumes (X, O) . Was bedeutet aber *offen* oder der dazu komplementäre Begriff *abgeschlossen*?

Zunächst stellen wir uns den Raum \mathbb{R}^3 vor und darin eine Kugel, einen s.g. Ball B mit dem Radius r , wobei $r \in \mathbb{R}$ und $r > 0$. Dann heißt

$$B_r := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < r^2\}$$

offener Ball in \mathbb{R}^3 , denn hier gehören die Punkte der Obeflächenphäre nicht dazu. Dagegen gehören diese dazu, wenn $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$. Dann haben wir einen abgeschlossenen Ball. Für den n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n , hätten wir einen Ball mit dem Radius $r \in \mathbb{R}$ ($r > 0$) und dem Mittelpunkt x mit den Koordinaten $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Dann wäre

$$B_r(x) := \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 < r^2\}$$

ein offener Ball. Das heißt, der Ball ohne seine Randpunkte (siehe Abb. 23) ist offen, während der Ball mit seinen Randpunkten abgeschlossen ist. Mithilfe des offenen Balles lässt sich schließlich die offene Menge definieren:

Definition 3.3 Die Menge $A \subset X$ mit $X = \mathbb{R}^n$ heißt *offen* $\Leftrightarrow \forall x \in A \exists r > 0 : B_r(x) \subset A$. Sie ist *genau dann abgeschlossen*, wenn ihre Komplementärmenge $X \setminus A$ *offen* ist.

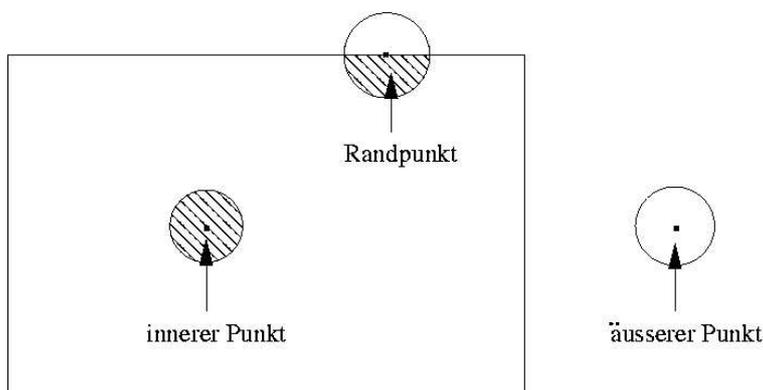


Abbildung 23: Zur Erklärung eines Randpunkts benutze ich hier das Beispiel mit $n = 2$ und A , als die Menge aller Punkte eines Rechtecks. Ein innerer Punkt ist der, dessen hinreichend kleine Umgebung stets innerhalb des Rechtecks liegt. Ein äußerer Punkt ist dementsprechend derjenige, dessen hinreichend kleine Umgebung stets außerhalb des Rechtecks liegt. Die Umgebung eines Randpunktes liegt allerdings immer innerhalb *und* außerhalb des Rechtecks gleichzeitig, egal wie klein sie ist. Die Menge A wäre abgeschlossen, wenn die Randpunkte des Rechtecks zu A gehören würden, und offen, wenn dies nicht der Fall wäre.

Jetzt wissen wir zwar, was ein Simplex ist, aber mit einem einzelnen kann man noch nicht so viel anstellen. Interessanter wird es, wenn man mehrere Simplices zusammennimmt. Dabei entsteht ein Simplicialkomplex:

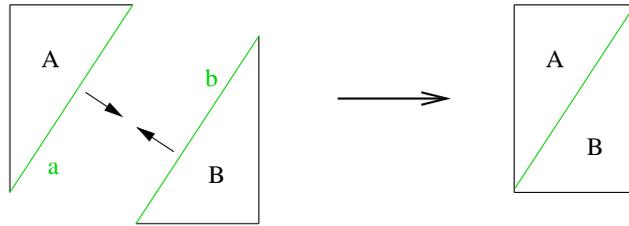


Abbildung 24: Die Dreiecke A und B werden an ihren Hypothenusen „verklebt“.

Definition 3.4 Eine Menge K von Simplices im \mathbb{R}^n heißt ein *Simplizialkomplex*, wenn gilt:

1. Mit jedem seiner Simplices enthält K auch dessen sämtliche Teilsimplices.
2. Der Durchschnitt von je zwei Simplices von K ist entweder leer oder ein gemeinsamer Teilsimplex.

3.3 Die Eulersche Charakteristik

Zunächst kann man sich einen Simplizialkomplex mit zwei Simplices vorstellen, z.B. zwei gleiche, rechtwinklige Dreiecke in der Ebene, die nebeneinander gelegt werden. In diesem Fall ist der Durchschnitt der beiden die leere Menge. Es ist aber möglich aus ihnen z.B. ein Rechteck zusammenzulegen. Dazu muss man sie an ihren Hypothenusen a und b miteinander identifizieren oder – mit anderen Worten – sie entlang dieser „verkleben“. Man bildet mit Hilfe einer Funktion, die bijektiv und stetig sein muss, die Seite a auf das Dreieck B ab (bzw. umgekehrt). Danach gehören alle Punkte der Seite a auch zur Seite b und umgekehrt und die beiden Seiten werden als eine betrachtet (Abb. 24).

Der entstandene Simlizialkomplex hat nun nicht mehr sechs Seiten, sondern nur noch fünf. Er gehört, wie alle Polygone, zu der Homöomorphieklasse der Kreisscheibe. Um das festzustellen, rechnet man seine Eulercharakteristik (oder Eulerzahl) nach dem Eulerschen Polyedersatz aus.

Eulerscher Polyedersatz: Sei P ein endlicher Polyeder im \mathbb{R}^3 . Seine *Eulersche Charakteristik* χ errechnet sich aus der Anzahl der Ecken E minus die Anzahl der Kanten K plus die Anzahl der Seitenflächen F :

$$\chi = E - K + F \tag{3.1}$$

Das Viereck, das aus zwei Dreiecken „zusammengeklebt“ ist, hat 4 Ecken, 5 Kanten und 2 Seiten (oder Flächenstücke). Daraus ergibt sich, dass $\chi = 4 - 5 + 2 = 1$. Bei einer Kreisscheibe haben wir 1 Flächenstück und ihren Rand betrachten wir als 1 Kante, die durch 1 Ecke mit sich selbst verbunden ist. Die Eulerzahl beträgt ebenfalls 1, denn $\chi = 1 - 1 + 1 = 1$. Ein gewöhnliches Polygon hat immer genauso viele Kanten wie Ecken, deshalb ist ihre Differenz immer 0. Dazu wird die Anzahl der Flächenstücke addiert, die immer 1 ist. Somit ist die Eulerzahl auch immer 1.

Weiterhin können wir feststellen, dass ein Viereck, das aus zwei Dreiecken geklebt wurde, dieselbe Eulerzahl besitzt wie ein normales Viereck. Und tatsächlich spielt es keine

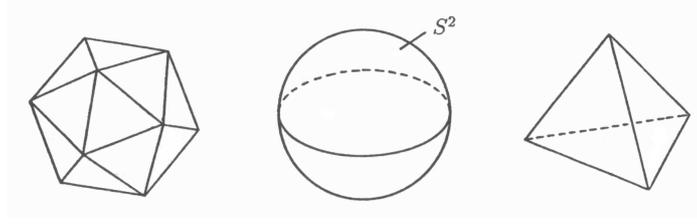


Abbildung 25: Für die Ikosaederoberfläche beträgt $\chi_1 = 12 - 30 + 20 = 2$, für die Tetraederoberfläche beträgt $\chi_2 = 4 - 6 + 4 = 2$. Es gilt: $\chi_1 = \chi_2 = \chi(S^2) = 2$.

Rolle, ob das Viereck oder allgemein das Polygon in eine beliebige Anzahl von Dreiecken zerteilt, also *trianguliert* ist. Solange diese Dreiecke miteinander verklebt bleiben, ändert sich nichts an der Topologie dieses Polygons. Er behält ja nach der Triangulierung seine ursprüngliche Form, nur an der Kombinatorik der Ecken, Kanten und Seiten ändert sich etwas. Die Invarianz der Eulerzahl beim Triangulieren ist für ein Polygon einfach zu zeigen. Wir haben ein konvexes Polygon mit $\chi_1 = E_1 - K_1 + F_1$. Wenn wir ein Dreieck abtrennen wollen, verbinden wir eine beliebige Ecke des Polygons mit der zweitnächsten Ecke durch eine Strecke. Die Anzahl der Ecken bleibt dabei konstant, $E_2 = E_1$. Es kommt eine Kante und eine Seite hinzu: $K_2 = K_1 + 1$ und $F_2 = F_1 + 1$. Nun ist

$$\chi_2 = E_2 - K_2 + F_2 = E_1 - K_1 - 1 + F_1 + 1 = E_1 - K_1 + F_1 = \chi_1.$$

Analog verhält es sich mit Polyedern, denn sie gehören alle zur Homöomorphieklasse der Sphäre. Diese kann man sich als 2 zu Halbsphären geformte Kreisscheiben vorstellen, die von 1 Kante zusammengehalten werden, die wiederum durch 1 Ecke mit sich selbst verbunden ist. Das ergibt $\chi = 1 - 1 + 2 = 2$, also haben alle Polyeder die Eulersche Charakteristik 2. Die verschiedenen Polyeder entstehen durch Triangulierung der Sphäre. Sie kann sowohl in beliebig viele Dreiecke zerlegt werden, als auch in beliebig viele gleiche oder verschiedene Polygone, denn alle Polygone bestehen aus Dreiecken. Trianguliert man die Sphäre z.B. in vier gleichseitige Dreiecke, bekommt man einen Tetraeder (siehe Abb. 25). Bei der Triangulierung in sechs Quadrate entsteht ein Würfel. Die Triangulierung eines Polyeders entspricht im Prinzip der eines Polygons, denn die Seiten der Polyeder sind immer Polygone.

An dieser Stelle kommen wir nocheinmal auf den Homöomorphismus zwischen der Sphäre und der Würfeloberfläche. Bei der in der Abbildung 20 gezeigten Projektion erhalten wir eine Sphäre mit Kanten und Ecken, die noch vom Würfel stammen, mit anderen Worten: die Kugeloberfläche ist in Quadrate mit gekrümmten Seiten zerlegt. Da wir aber wissen, dass diese Zerlegung für die Topologie nicht von Bedeutung ist, können wir die Kanten und Ecken weglassen und erhalten eine normale Sphäre.

3.4 Die Einteilung der Flächen

Mit Hilfe des Eulerschen Polyedersatzes kann man Flächen in Homöomorphieklassen einteilen und z.B. herausfinden, ob zwei gegebene Flächen ineinander überführt werden können. Flächen, die orientierbar und geschlossen sind, gehören zu einer der Homöomorphieklassen, die von der Sphäre mit einer bestimmten Anzahl n von Henkeln gebildet wird. Orientier-

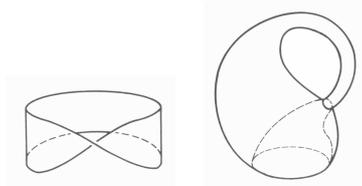


Abbildung 26: Das Möbiusband (links) ist nicht orientierbar, genauso wie die Kleinsche Flasche (rechts), denn beide haben nur eine Seite. Die Kleinsche Flasche ist außerdem ein Beispiel für eine Fläche, die nicht in den \mathbb{R}^3 eingebettet werden kann, weil sie sich sonst selbst schneidet (siehe Bild). Das Möbiusband dagegen ist nach unserer Definition gar keine Fläche, denn es hat einen Rand, an dem die Umgebung natürlich nicht zu einer Kreisscheibe homöomorph ist.

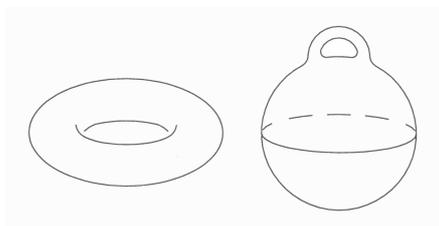


Abbildung 27: Hier sieht man, dass der Torus eigentlich eine Sphäre mit einem Henkel ist.

bar ist eine Fläche, wenn sie zwei Seiten besitzt, wie die Sphäre oder der Torus. Dementsprechend ist sie nicht orientierbar, wenn sie nur eine einzige Seite hat, wie z.B. das Möbiusband oder die Kleinsche Flasche (Abb. 26). Der Begriff “geschlossen” beinhaltet eigentlich zwei Dinge: die Fläche ist einerseits kompakt, d.h. sie breitet sich nicht in die Unendlichkeit aus, und andererseits hat sie keinen Rand.

Die Anzahl n der Henkel entspricht dem s.g. Geschlecht g der Fläche: $n = g$. Dieses steht in Beziehung zur Eulerschen Charakteristik. Es gilt:

$$\chi = 2 - 2g. \quad (3.2)$$

Ist wiederum χ gegeben, so kann man g ausrechnen:

$$g = \frac{\chi - 2}{-2}. \quad (3.3)$$

Anhand der Gleichung 3.2 kann man sehen, dass die Sphäre mit $\chi = 2$ die größte Eulerzahl und die kleinste Anzahl von Henkeln, nämlich $n = 0$, besitzt. Wäre $\chi > 2$, müsste $n < 0$ sein, was aber unmöglich ist. Die erste Homöomorphieklasse unter den Flächen ist deshalb die der Sphäre. Die zweite ist die des Torus oder der Sphäre mit einem Henkel, mit $\chi = 0$ (Abb. 27). Diese Eulerzahl stimmt mit der der Polygone überein. Das lässt sich damit erklären, dass der Torus durch das “Verkleben” von den jeweils gegenüberliegenden Seiten eines Rechtecks entstehen kann. Weitere Homöomorphieklassen sind in der Tabelle 1 zu sehen.

Homöomorphieklasse	Eulerzahl	Geschlecht
	$\chi = 2$	$g = 0$
	$\chi = 0$	$g = 1$
	$\chi = -2$	$g = 2$
	$\chi = -4$	$g = 3$

Tabelle 1: Hier sind einige Homöomorphieklassen dargestellt.

4 Der Konfigurationsraum als Fläche

4.1 Nachweis der Flächeneigenschaften

Mithilfe der Flächendefinition, der Eulerschen Charakteristik und dem Nachweis bestimmter Flächeneigenschaften können wir das Aussehen unseres Konfigurationsraumes genau bestimmen. Zunächst muss gezeigt werden, dass er überhaupt eine Fläche ist. Ein Konfigurationsblatt, ein ebenes Sechs- bzw. Dreieck, ist homöomorph zur Kreisscheibe und somit hat auch jeder innere Punkt eine Umgebung, die wie eine Kreisscheibe aussieht. An einer Kante sind immer genau zwei Sechs- bzw. Dreiecke “verklebt”, deshalb hat ein Randpunkt eines Konfigurationsblattes zwei Umgebungen – eine aus dem einen und eine aus dem anderen Sechs- bzw. Dreieck, die jeweils homöomorph zu einer halben Kreisscheibe sind und sich zur einer ganzen zusammenfügen. An den Ecken sind immer vier Sechs- bzw. Dreiecke “verklebt”, deshalb hat ein Eckpunkt vier Umgebungen, von denen jede homöomorph zu einem Viertel einer Kreisscheibe ist. Diese ergeben zusammen wieder eine Kreisscheibe. Somit ist gezeigt, dass der Konfigurationsraum um jeden Punkt herum lokal wie eine Kreisscheibe aussieht, also eine Fläche ist.

Um herauszufinden, ob er zu einer der Homöomorphieklassen aus dem Kapitel 3.4 gehört, müssen aber noch einige Eigenschaften festgestellt werden, nämlich Orientierbarkeit und Geschlossenheit. Unser Raum ist erstens kompakt, weil er aus genau acht Sechs- bzw. Dreiecken besteht. Zweitens hat er keinen Rand, denn an jeder Kante sind bekanntlich zwei und in jeder Ecke vier Sechs- bzw. Dreiecke miteinander “verklebt”.

Der Nachweis der Orientierbarkeit wird anschaulich geführt. Diese Eigenschaft bedeutet, dass man die Fläche praktisch in zwei Farben anmalen könnte, denn sie hätte zwei Seiten. Bei dem Konfigurationsraum geht man von einem beliebigen Sechseck aus und malt es auf einer Seite rot und auf der anderen grün an. Dabei ist genau definiert, wann ein Sechseck auf der Vorderseite rot und wann grün ist. Die Vorderseite ist die, bei der die Verankerungspunkte A, B und C mathematisch positiv angeordnet sind. Ist in dem Tripel des Sechsecks das Produkt der Vorzeichen positiv (z.B. “– – +”), wird die Vorderseite rot und die Rückseite grün angemalt. Genau umgekehrt ist die Färbung, wenn das Produkt negativ ist (z.B. “– + +”). nun beginnt man bei einem beliebigen Sechseck, z.B. “+++”, mit der Einfärbung. Das Produkt der Vorzeichen ist positiv, also wird es oben rot und unten grün. Nun nimmt man eines der Sechsecke, die an einer Kante an das erste Sechseck

grenzen. Beim Übergang über diese Kante in das zweite Sechseck ändert sich genau ein Vorzeichen im Tripel und damit wird ihr Produkt negativ. Hier wird die Vorderseite grün und die Rückseite rot. Betrachten wir nun bloß diese beiden Sechsecke als “verklebt”. Damit bei beiden die Vorderseite nach oben zeigt, müssen sie an der Kante gefaltet sein, also aufeinander liegen. In dem Fall würde man zuerst rote Farbe sehen und darunter grüne. Da aber die beiden Sechsecke sich, wenn sie in die Fläche “eingebaut” sind, nebeneinander befinden, hat man bei beiden die rot angemalten Seite oben. Man befindet sich nach dem Übergang in das zweite Sechseck auf der selben Seite der Fläche. Auf diese Weise fügt man nacheinander alle Sechsecke an, bis man sich durch jedes Konfigurationsblatt bewegt hat und wieder im ersten angekommen ist.

Man sieht, dass man nach dem Durchlaufen des gesamten Konfigurationsraums immernoch auf der selben Seite der Fläche ist, nämlich auf der roten. Damit gibt es keine Möglichkeit auf die andere Seite der Fläche zu gelangen, d.h. sie sind nicht verbunden. Also hat diese Fläche tatsächlich zwei Seiten und ist damit orientierbar. Für die beiden dreieckigen Formen der Konfigurationsblätter geht der Nachweis analog.

Nun wissen wir, dass der Konfigurationsraum in eine der Homöomorphieklassen aus der Tabelle 3.4 gehört, wenn seine Fläche nicht noch mehr Henkel hat. Für die Eulersche Charakteristik, mit der wir das endgültig bestimmen, spielt die Kombinatorik der Ecken, Kanten und Seiten die entscheidende Rolle. Deshalb müssen wir an dieser Stelle zwischen der Form der Konfigurationsblätter unterscheiden.

4.2 Die Fläche vom Geschlecht 3

Betrachten wir zunächst den Fall mit den sechseckigen Konfigurationsblätter. Wir wissen, dass die gesuchte Fläche ein Simplizialkomplex, bestehend aus 8 “zusammengeklebten” Sechsecken, ist. Die Anzahl der Ecken ist $E = \frac{6 \cdot 8}{4} = 12$, weil jede Ecke zu vier Konfigurationsblättern gehört. Die Anzahl der Kanten ist dementsprechend $K = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$, weil jede Kante zu zwei Sechsecken gleichzeitig gehört. Wir können nun die Eulerzahl χ_S ^b ausrechnen:

$$\chi_S = E - K + F = 12 - 24 + 8 = -4.$$

Demnach hat unsere Fläche das Geschlecht $g = 3$ (siehe Tabelle 3.4) und ist homöomorph zur Sphäre mit drei Henkeln. Ihr wirkliches Aussehen ist nicht so einfach darzustellen, unter anderem dadurch, dass immer zwei konkave bzw. zwei konvexe Seiten der Sechsecke miteinander verklebt werden und eine nach innen bzw. nach aussen gewölbte Kante der Fläche bilden. Die Einbettung dieser Fläche in den \mathbb{R}^3 in Abb. 28 entspricht aber zumindest dem Kongruenzverhalten des Konfigurationsraums, denn alle acht Sechsecke sind gleich. Im Weiteren wird deshalb diese Abbildung zur Visualisierung von Kurven u.ä. auf der Fläche benutzt.

4.3 Die Sphäre

Die dreieckigen Konfigurationsblätter mit konvexen und die mit konkaven Seiten können als ein Fall betrachtet werden. Der Simplizialkomplex besteht wieder aus 8 Konfigurationsblättern. Die Anzahl der Ecken ist diesmal $E = \frac{3 \cdot 8}{4} = 6$ und die Anzahl der Kanten

^b χ_S — Eulerzahl für die Fläche, die aus Sechsecken besteht.

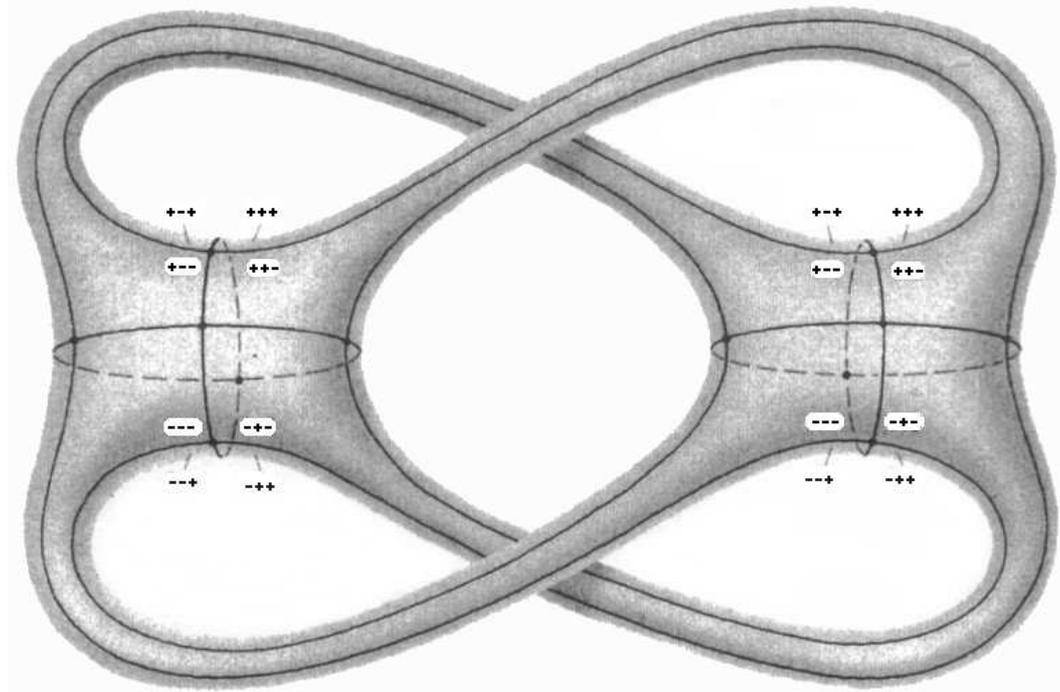


Abbildung 28: Hier sieht man eine symmetrische Einbettung der Fläche vom Geschlecht 3 in den \mathbb{R}^3 . Eine 0 in den Tripeln entspricht einem “-” und eine 1 entspricht einem “+”.

ist $K = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12$. Die Eulerzahl χ_D ^c ist:

$$\chi_D = E - K + F = 6 - 12 + 8 = -2.$$

Wir sehen, dass die Fläche diesmal homöomorph zur Sphäre ist. Die Darstellung ist auch einfacher: die Kugeloberfläche kann man ganz leicht in acht konvexe Dreiecke triangulieren (siehe Abb. 29). Im Fall des konkaven Dreiecks kann man sich einen Homöomorphismus zur Sphäre auch gut vorstellen.

4.4 Die Frage nach dem Übergang

Wir wissen jetzt also, zu welchen Homöomorphieklassen der Konfigurationsraum in Abhängigkeit von den Parametern gehören kann. Ebenfalls ist aus dem Kapitel 2.2.4 bekannt, dass man beim Verändern der Parameter zunächst ein konkaves Dreieck, dann ein Sechseck und schließlich ein konvexes Dreieck als Konfigurationsblatt bekommt (oder umgekehrt). Für den Konfigurationsraum würde das bedeuten, dass er zuerst wie eine Sphäre aussieht, dann wie eine Fläche mit $g = 3$ und am Ende wieder wie eine Sphäre. Dabei gibt es offensichtlich zwei Grenzfälle, zwei Arten von Parameterkonfigurationen, für die der Konfigurationsraum weder eine Sphäre, noch eine Fläche mit $g = 3$ ist, sondern etwas dazwischen. An dieser Stelle ergibt sich die Hauptfrage der gesamten Untersuchungen, nämlich was mit den Flächen beim Annähern an einen Grenzfall passiert und wie dieser Übergang eigentlich aussieht.

^c χ_D — Eulerzahl für die Fläche, die aus Dreiecken besteht.

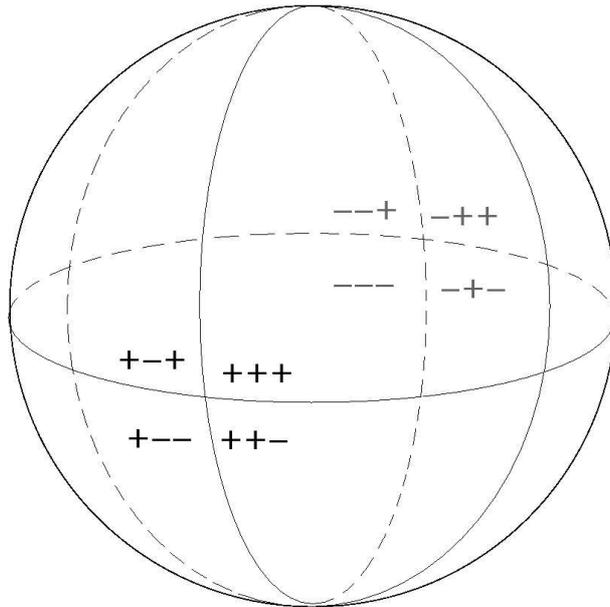


Abbildung 29: Hier ist die Sphäre aus den konvexen Dreiecken zusammengesetzt. Durch die Beschriftung sieht man, welche Konfigurationsblätter an welche grenzen.

Die Beantwortung dieser Fragen benötigt genauere Kenntnisse über den Konfigurationsraum und dazu müssen einige neue Begriffe aus der Topologie eingeführt werden.

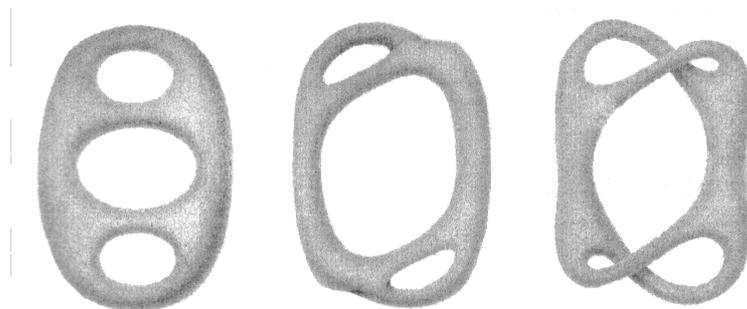


Abbildung 30: So kann man sich eine Umformung der „klassischen“ Fläche mit drei Henkeln, wo man diese gut erkennt, in die Fläche des Konfigurationsraums vorstellen, die mit der kanonischen Polygonzerlegung kompatibel sein muss.

5 Theoretische Grundlagen zu Homotopieklassen

5.1 Kurven auf Flächen

Der Begriff der Homotopie bezieht sich auf Kurven, die sich auf der Ebene oder auch auf anderen Flächen befinden. Eine Kurve auf einer Fläche ist eine stetige Abbildung c , die jedem Punkt eines Intervalls $[a,b]$ einen Punkt auf der Fläche zuordnet. Eine geschlossene Kurve ist diejenige, bei der der Anfangspunkt mit dem Endpunkt übereinstimmt, d.h. $c(a) = c(b)$.

Gegeben seien zwei Kurven c und c' über dem selben Intervall $[a, b]$. Eine Homotopie von c und c' ist eine stetige Abbildung des Rechtecks $[a,b] \times [0,1]$, die auf der unteren bzw. oberen Kante mit den Kurven c und c' übereinstimmt, auf eine Fläche. Eine Homotopie von geschlossenen Kurven bildet die Punkte der gegenüberliegenden vertikalen Seiten des Rechtecks auf gleiche Punkte ab. Die beiden Kurven heißen homotop: $c \simeq c'$. Die Voraussetzung ist, dass die Kurven sich auf einer zusammenhängenden Fläche befinden. Die Familie aller zueinander homotoper Kurven heißt Homotopieklasse (\bar{c}). Die Länge einer Kurve ist stets größer bzw. gleich 0.

Satz 5.1 *Für geschlossene, glatte Flächen gilt: In jeder Homotopieklasse befindet sich mindestens eine Kurve die das Längeninfimum dieser Klasse einnimmt.*

Auf der Sphäre gehören alle geschlossenen Kurven zur 0-homotopen Klasse, sie lassen sich immer auf einen Punkt zusammenziehen.

Seien $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n$ Homotopieklassen von geschlossenen Kurven. Wir nennen diese *Erzeuger*, wenn jede andere geschlossene Kurve aus Repräsentanten von $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n$ zusammengesetzt werden können. Wenn die Erzeuger, aus denen eine bestimmte Kurve zusammengesetzt werden soll, sich weder schneiden noch berühren, wählt man einen beliebigen Basispunkt. Dann nimmt man jeweils einen solchen Repräsentanten, der durch den Basispunkt verläuft. Nun berühren sich die Erzeuger in dem Basispunkt und können zusammengesetzt werden.

Satz 5.2 *Jede geschlossene, orientierbare Fläche vom Geschlecht g hat $2g$ Erzeuger.*

Dabei ist es nicht eindeutig festgelegt, welche Homotopieklassen zu den $2g$ Erzeugern gehören.

Diese Begriffe sollen nun am Beispiel des Torus veranschaulicht werden. Sein Geschlecht ist 1, also gibt es 2 Erzeuger der Fundamentalgruppe. Der erste ist die Homotopieklasse der geschlossenen Kurven, die horizontal zum Radius des Torus um den Henkel herumlaufen. Der zweite ist die Klasse der Kurven, die entlang des Radius um den Henkel verlaufen. Die Erzeuger stehen immer senkrecht aufeinander. Man sieht, dass man durch diese beiden Kurvenarten alle anderen Kurven beschreiben kann. Die Charakterisierung einer beliebigen Kurve auf dem Torus beinhaltet nur die Anzahl der Durchläufe der Kurven a und b . Man nimmt zunächst an, dass alle Homotopieklassen den selben Anfangspunkt – den Basispunkt haben. So kann man z.B. den Torus entlang der Erzeuger aufschneiden und bekommt ein Viereck. Alle Kurven sind in diesem Viereck darstellbar.

Weitere interessante Kurven sind die Geodäten. Um sie zu definieren muss ein Längen- und Abstandsbegriff auf einer Fläche gegeben sein. Ist dies der Fall, so lautet die Definition wie folgt.

Definition 5.3 *Eine Kurve, auf der die Verbindung zweier hinreichend naher Punkte stets ein Kurvenstück darstellt, dessen Länge den Abstand dieser Punkte realisiert, heißt lokal kürzeste Kurve oder Geodäte.*

Stellen wir uns einen schmalen Lichtstrahl vor, der sich bekanntlich geradlinig ausbreitet, aber auf einer bestimmten Fläche bleiben muss. Dieser hat in jedem Punkt eine eindeutige Richtung und wenn er zum Ausgangspunkt zurückkehrt, ist sein zurückgelegter Weg eine geschlossene Geodäte. Zum Beispiel auf der Ebene sind Geodäten einfach Geraden und auf der Sphäre sind es die Großkreise (z.B. Meridiane). Am letzteren Beispiel sieht man, dass man nicht zwingend die kürzeste Verbindung zweier Punkte wählt, wenn man entlang einer Geodäte läuft.

Satz 5.4 *Auf einer geschlossenen Fläche mit negativer mittlerer Krümmung liegt in jeder Homotopieklasse eine eindeutige Geodäte (Vgl. [6]).*

5.2 Krümmung einer Fläche

Es gibt Flächen, bei denen die Krümmung K leicht zu bestimmen ist, denn sie ist auf der gesamten Fläche konstant. Zum Beispiel hat die Pseudosphäre eine konstante negative Krümmung. Doch bei den allgemeinen Flächen unterscheidet sie sich von Stelle zu Stelle. In solchen Fällen kann man immernoch den Mittelwert für die Krümmung bestimmen, wenn man die Krümmung in jedem Punkt bestimmt. Was ist aber die Krümmung in einem Punkt? Um zum Beispiel das Vorzeichen dieser herauszufinden, legt man an diesem Punkt die Tangentialebene an, also eine Ebene, die die Fläche lokal nur in diesem einen Punkt berührt. Nun gibt es drei Möglichkeiten:

1. Liegt die Fläche in einer unendlich kleinen Umgebung um den Punkt auf einer Seite der Tangentialebene, so ist $K > 0$.
2. Punkte, in deren Umgebung die Fläche die Tangentialebene entlang einer Kante berührt, haben $K = 0$.
3. Liegt die Fläche zu beiden Seiten der Tangentialebene, ist $K < 0$.

Ein Satz ist für unseren Konfigurationsraum wichtig:

Satz 5.5 (Gauß-Bonnet) *Jede Fläche mit $g \geq 2$ hat eine negative mittlere Krümmung. Dabei muss sie nicht konstant sein.*

6 Zwei Modelle des Übergangs

Für den Übergang der verschiedenen Konfigurationsräume ineinander wollen wir folgende Arbeitshypothese aufstellen:

Normalerweise entspricht das „Verschwinden“ von Henkeln bei einer Fläche dem Zusammenziehen von bestimmten längenminimierenden Kurven, welche eine Hälfte der Erzeuger liefern. Diese werden immer kleiner, bis sie zu einem Punkt geschrumpft sind, und „verschwinden“ schließlich. Dieser Vorgang muss stetig ablaufen. Pro Henkel muss sich genau eine solche Kurve zusammenziehen, also insgesamt g Kurven.

Bei der Fläche vom Geschlecht 3 müssten sich also 3 Erzeuger zusammenziehen, damit alle drei Henkel verschwinden. Zum Beispiel können zwei verschiedene Möglichkeiten so aussehen:

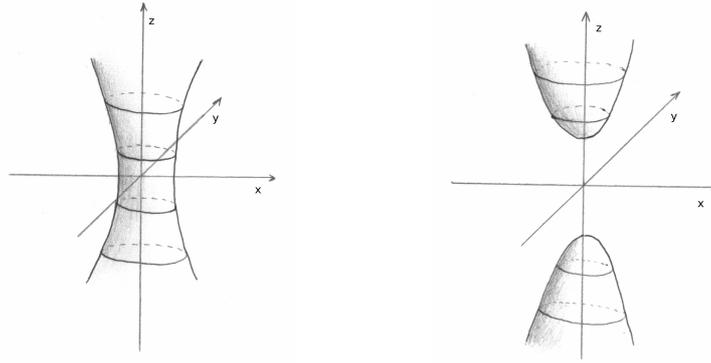


Abbildung 31:

Bei der ersten ziehen sich drei Kurven zusammen die jeweils einmal um ein „Loch“ herumlaufen. Dabei werden diese „Löcher“ immer kleiner, bis im Grenzfall nur noch drei Punkte übrig sind, die die obere Seite des topologischen Objekts mit der unteren verbinden. In einem solchen Zustand ist dieses Objekt keine Fläche, denn die Umgebung der drei Punkte sieht aus wie ein Doppelkegel. Dann reißt die Verbindung an diesen drei Stellen auf und die Fläche wird zu einer Sphäre.

Eine zweite Möglichkeit ist das Zusammenziehen der 3 Erzeuger, die jeweils einmal um einen Henkel herumlaufen. Dabei werden die Henkel an einer Stelle immer dünner bis sie schließlich auseinanderreißen und die Fläche keine Henkel mehr hat.

In beiden Fällen ist ein lokales Modell für das Verschwinden eines Henkels durch den Übergang vom 1-schaligen Hyperboloid zum 2-schaligen gegeben (siehe Abb. 31). Der 1-schalige Hyperboloid hat die Darstellung:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

Im Grenzfall hat man einen Doppelkegel wie in Abbildung 18. Der 2-schalige Hyperboloid hat dann die Darstellung:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1\}.$$

Aus diesem Modell des Zusammenziehens von Erzeugern ergibt sich die Hypothese für die Frage nach dem Übergang der Konfigurationsräume. Wir haben, ausgehend von der Fläche mit $g = 3$, zweimal den Übergang zur Sphäre. Einmal wird das Konfigurationsblatt von einem Sechseck zu einem konvexen und einmal zu einem konkaven Dreieck. Nun stellt sich die Frage, ob man die Übergänge je nach ihrer Art einer der oben beschriebenen Möglichkeiten zuordnen kann. Nun müssen die Erzeuger des Konfigurationsraumes, die sich zusammenziehen, gefunden werden und dazu habe ich dessen Geometrie genauer untersucht.

7 Die Geometrie des Konfigurationsraums

Die Geometrie auf dem Konfigurationsraum kann verschieden gewählt werden. Die Wahl dieser hängt von dem Verwendungszweck ab; in unserem Fall müssen Geodäten mit der

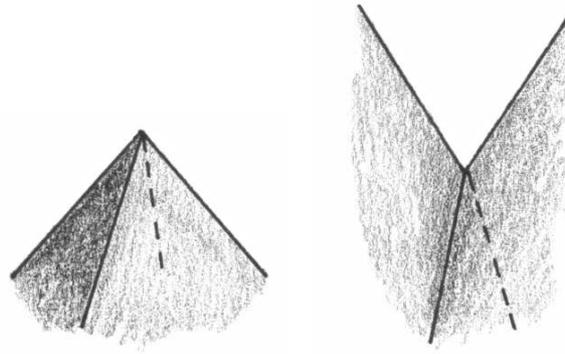


Abbildung 32: Die Umgebung einer Ecke mit positiver bzw. negativer Eckenkrümmung.

gewählten Geometrie möglichst gut zu finden sein. Im folgenden wird deshalb eine Geometrie für den Konfigurationsraum gewählt, in der die Sechsecke flach sind und die Geodäten zumindest zum Teil Geradenstücke sind.

7.1 Die Krümmung

Als erstes kann man mit Sicherheit sagen, dass die mittlere Krümmung der Fläche, die aus Sechsecken besteht, nach Satz 5.5 negativ ist, denn das Geschlecht der Fläche ist 3. Beim Anblick der Abbildung 28 könnte man meinen, dass die Krümmung des Konfigurationsraums gleichmäßig verteilt ist. Doch dieser Schein trügt, denn dieser ist zu der dargestellten Fläche nur homöomorph. In Wirklichkeit sind die Sechsecke eben, haben also $K = 0$. Die negative und positive Krümmung konzentriert sich an den Kanten, und zwar sogar unendlich stark. An den Kanten, die aus den konvexen Seiten der Sechsecke entstehen ist $K \gg 0$. An denen, die aus den konkaven entstehen ist $K \ll 0$. Aber insgesamt überwiegt die negative Krümmung.

Um den Krümmungstyp an den Ecken zu bestimmen, muss man wissen, wie groß die Innenwinkel in dem Sechseck sind. Sind sie kleiner als 90° , ist die Winkelsumme an dem Eckpunkt auf der Fläche kleiner als 360° . Diesen Eckpunkt mit den 4 anliegenden Flächenstücken kann man sich näherungsweise wie die Ecke einer Pyramide, vorstellen, also konvex. Die Eckenkrümmung ist positiv. Wenn die Winkel genau 90° betragen, ergeben sie zusammen 360° , die Eckenkrümmung ist 0. Sind die Winkel größer als 90° , ist die Winkelsumme größer als 360° und die Eckenkrümmung an diesem Eckpunkt ist negativ. Die Fläche in seiner Umgebung ist vergleichbar mit einer triangulierten Sattelfläche.

An dieser Stelle folgt die Herleitung der Gleichung für den Innenwinkel des Sechsecks in Abhängigkeit von den Parametern R , r und L_R . Nehmen wir ein sechseckiges Konfigurationsblatt mit einem beliebigen Innenwinkel α (Abb 33). Da die Seiten gekrümmt sind, entspricht der Innenwinkel in einer Ecke P dem Winkel zwischen den Tangenten an den beiden Kanten in P . Wir zeichnen die Senkrechten zu den Radien $R + r$ (grün) und $R - r$ (blau) in P . Der Winkel über α ist sein Scheitelwinkel, deswegen genauso groß. Mithilfe des Dreiecks $\triangle PBC$ können wir den Winkel in Abhängigkeit von den Parametern darstellen. Zunächst muss γ durch α ausgedrückt werden. Der Winkel zwischen einem

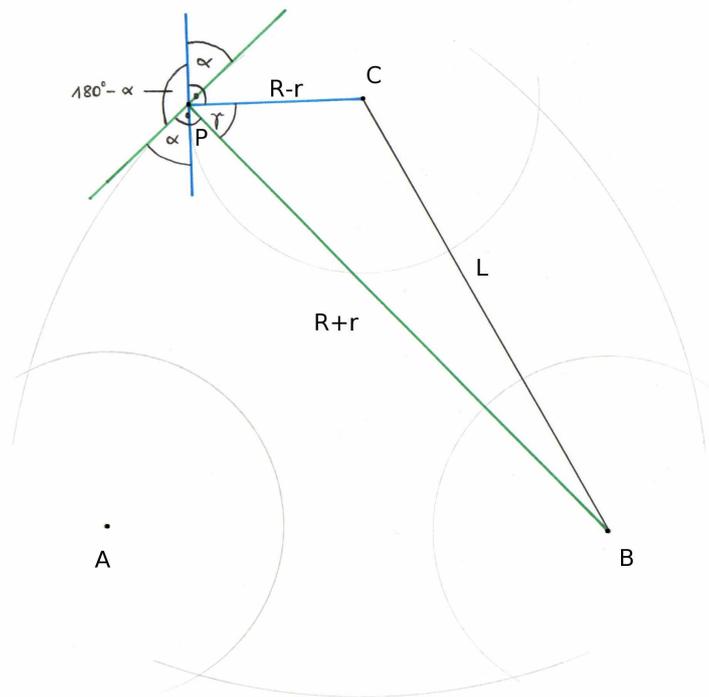


Abbildung 33: In dem Dreieck $\triangle PBC$ kann man eine Gleichung für α aufstellen.

Radius und der zugehörigen Senkrechten beträgt $90^\circ - \alpha$. Nun betrachten wir den Winkel $180^\circ - \alpha$, bzw. seinen Scheitelwinkel. Dieser beträgt:

$$180^\circ - \alpha = \gamma + 2 \cdot (90^\circ - \alpha).$$

Damit ist γ :

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - 2 \cdot (90^\circ - \alpha)$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - 180^\circ + 2 \cdot \alpha$$

$$\gamma = \alpha.$$

Der Winkel γ in dem Dreieck $\triangle PBC$ kann also durch α ersetzt werden. Wir ersetzen außerdem L durch $\sqrt{3}L_R$. Jetzt können wir problemlos den Kosinussatz mit α in diesem Dreieck aufstellen:

$$3L_R^2 = (R+r)^2 + (R-r)^2 - 2(R^2 - r^2) \cos \alpha.$$

Durch Umstellen dieser Gleichung nach $\cos(\alpha)$ bekommen wir eine Gleichung für den Innenwinkel des Sechsecks in Abhängigkeit von R , r und L_R :

$$\cos \alpha = \frac{3L_R^2 - [(R+r)^2 + (R-r)^2]}{-2(R^2 - r^2)} = \frac{(R+r)^2 + (R-r)^2 - 3L_R^2}{2(R^2 - r^2)}$$

$$\cos \alpha = \frac{R^2 + 2Rr + r^2 + R^2 - 2Rr + r^2 - 3L_R^2}{2(R^2 - r^2)}$$

$$\cos \alpha = \frac{2(R^2 + r^2) - 3L_R^2}{2(R^2 - r^2)}. \quad (7.1)$$

Die Gleichung 7.1 ist in einem bestimmten Bereich definiert, denn es muss gelten:

$$-1 \leq \frac{2(R^2 + r^2) - 3L_R^2}{2(R^2 - r^2)} \leq 1.$$

Die erste Bedingung lautet:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{2(R^2 + r^2) - 3L_R^2}{2(R^2 - r^2)} && R > r \\ -2R^2 + 2r^2 &\leq 2R^2 + 2r^2 - 3L_R^2 \\ -4R^2 &\leq -3L_R^2 \\ R^2 &\geq \frac{3}{4}L_R^2 \\ R &\geq \frac{\sqrt{3}}{2}L_R. \end{aligned}$$

Die zweite Bedingung lautet:

$$\begin{aligned} \frac{2(R^2 + r^2) - 3L_R^2}{2(R^2 - r^2)} &\leq 1 && R > r \\ 2R^2 + 2r^2 - 3L_R^2 &\leq 2R^2 - 2r^2 \\ 4r^2 &\leq 3L_R^2 \\ r &\leq \frac{\sqrt{3}}{2}L_R. \end{aligned}$$

7.2 Die Metrik

Der Begriff der Metrik beinhaltet unter anderem den passenden Längenbegriff auf dem Konfigurationsraum und die Definition der lokal kürzesten Kurven, der Geodäten.

Da die Konfigurationsblätter eben sind, haben sie im Inneren die euklidische Geometrie und den euklidischen Längenbegriff. Befinden sich zwei Punkte in dem selben Konfigurationsblatt, ist die kürzeste Verbindung zwischen ihnen eine Strecke.

An dieser Stelle muss erwähnt werden, dass die Metrik zwar für alle Formen der Konfigurationsblätter gilt, aber die Regeln zur Weiterführung der Geodäten sind insbesondere für die Sechsecke gedacht, weil wir Geodäten auf dem Konfigurationsraum der Sechsecke suchen. Auf der Sphäre ist die Suche nach geschlossenen Geodäten nicht interessant, da sie alle zur selben Homotopieklasse gehören.

Sucht man eine Geodäte, die durch mehrere Konfigurationsblätter verläuft, so ist die Sache etwas komplizierter. Man muss dabei natürlich Kanten überqueren und deshalb klären, welche die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist, die auf zwei verschiedenen Seiten einer beliebigen Kante liegen. Wir können uns die zwei Konfigurationsblätter, die durch diese Kante "verklebt" sind, zunächst in der Ebene aufgeklappt vorstellen. Auf diese Weise sehen wir, dass die kürzeste Verbindung zwischen den beiden Punkten immer noch eine Strecke ist. Aber wir betrachten den wirklichen Konfigurationsraum und darin liegen die Konfigurationsblätter direkt übereinander. Bildet man jetzt die Strecke als den

kürzesten Weg zwischen zwei Punkten ab, sieht es aus, als wäre er an der Kante reflektiert worden. An einer Kante wird also eine Geodäte nach dem Reflexionsgesetz fortgeführt. Auf diese Weise können wir jetzt schon geschlossene Kurven auf dem Konfigurationsraum finden, von denen wir die Geodäten herausuchen können, sofern wir die Ecke vermeiden und nicht die Kanten selbst betrachten.

Diese Metrik nennen wir die „*Billiardmetrik*“, denn wenn man die Projektion des Konfigurationsraumes ^d nimmt, und die Bewegung des Punktes O entlang einer Kurve, die durch mehrere Konfigurationsblätter verläuft, nachvollzieht, sieht es aus, als würde die Kurve immer wieder an den Kanten reflektiert werden und stets im Sechs- bzw. Dreieck bleiben. Diese Bewegung erinnert an die einer Billiardkugel.

Bei einer Kurve, die entlang einer Kante verläuft, muss man zwischen einer konkaven und einer konvexen Kante unterscheiden. Ist die Kante konkav, so verläuft entlang dieser tatsächlich eine Geodäte. Eine noch kürzere Verbindung zweier Punkte auf einer solchen Kante wäre eine Sekante durch diese Punkte, die aber wegen der Konkavität außerhalb des Konfigurationsraums liegen würde und demnach nicht existiert.

Anders ist es bei einer konvexen Kante. Sie kann niemals eine lokal kürzeste Verbindung sein, denn jede Kurve, die etwas ins Innere eines Konfigurationsblatts abweicht, wie im Extremfall eine Sekante, ist kürzer.

An den Ecken ist die eindeutige Fortführung einer Geodäte leider im Allgemeinen nicht bestimmt. Es hängt von der Krümmung an der jeweiligen Ecke ab, also von der Größe des Innenwinkels α eines Konfigurationsblatts.

Ist $\alpha < 90^\circ$ und damit $K > 0$, so ist die Umgebung der Ecke konvex. In diesem Fall ist eine Kurve durch die Ecke nie die lokal kürzeste, denn verschiebt man die Kurve nur ein wenig zur Seite, sodass sie nicht mehr durch die Ecke verläuft, wird sie kürzer.

Wenn $\alpha = 90^\circ$ und $K = 0$ ist, ist der Konfigurationsraum in der Umgebung der Ecke eben. So können Geodäten ganz einfach als Geraden durch die Ecken fortgeführt werden. Und schließlich hat die Ecke eine sattelförmige, also konkave Umgebung, wenn $K < 0$ und $\alpha > 90^\circ$. In diesem Fall verläuft eine ganze Familie von Geodäten durch die Ecken, denn jeder Weg, der etwas von der Ecke abweichen würde, wäre länger. Allerdings gibt es hier keine eindeutige Regel zur Fortführung einer Geodäte.

Nun wissen wir, wie die Geodäten lokal auf dem Konfigurationsraum aussehen. Für den Übergang suchen wir geschlossene Kurven die sich kontinuierlich zusammenziehen. Diese Kurven müssen logischerweise bei einer beliebigen Konfiguration zu den kürzesten Kurven gehören. Eine gute Möglichkeit, solche Kurven zu finden, ist die Suche unter den geschlossenen Geodäten, denn sie sind wenigstens lokal die kürzesten. Hat man einige Geodäten verschiedener Homotopieklassen gefunden, kann man unter ihnen die kürzesten herausuchen und betrachten, was mit ihnen während der Annäherung an den Übergang geschieht. Mein Vorgehen nach diesem heuristischen Schema wird in den folgenden Kapiteln beschrieben.

^dEin universelles Konfigurationsblatt, das nicht zu einer bestimmten Doppelarmstellung gehört. Es ist die Konfigurationsfläche, in dem sich das Mittelgelenk des realen Gestänges bewegen kann.

8 Geodäten auf dem Konfigurationsraum

8.1 Eine Auswahl von Geodäten

Die Übergänge werden wir von dem Konfigurationsraum aus betrachten, der aus Sechsecken besteht, also brauchen wir die geschlossenen Geodäten nur dort zu suchen. Um eine solche Kurve zu finden, kann man z.B. einen Anfangspunkt in einem Konfigurationsblatt und eine Richtung festlegen und dieser solange in den Konfigurationsblättern geradlinig folgen und den Weg an den Kanten reflektieren, bis man wieder am Anfangspunkt angelangt ist. Dabei sollte man im Allgemeinen Ecken vermeiden (siehe Kapitel 7.2). Ich hatte mich für die experimentelle Methode der Geodätensuche entschieden und zeichnete einige Konfigurationsblätter mit verschiedenen Radien auf Papier. Dann probierte ich mithilfe von Stift und Geodreieck einige Geodäten ausfindig zu machen. Die gefundenen Geodäten sind in der Tabelle 8.1 dargestellt.

Die Geodäten, die ich durch Ausprobieren gefunden habe, sind natürlich nur eine kleine Auswahl aller möglichen, denn es gibt unendlich viele von ihnen auf dem Konfigurationsraum.

8.2 Die kürzesten Geodäten

Das Finden der kürzesten Geodäten erfolgte ebenfalls experimentell mit dem Lineal. Ich hatte die Länge jeder gefundenen Kurve ausgemessen, indem ich ihre Länge innerhalb eines Konfigurationsblatts maß und mit der Anzahl der durchlaufenen Blätter multiplizierte (siehe Tabelle 8.1). Das war möglich, weil die Geodäten aufgrund der „Billiardmetrik“ symmetrisch sind.

Nur bei der Geodäte 6 habe ich für die Länge gleich die hergeleitete Formel verwendet und die jeweiligen Größen eingesetzt. Wie man in der Tabelle x sieht, stellte sie sich als eine der kürzesten unter den gefundenen Geodäten heraus, nämlich als zweitkürzeste. Sie verläuft entlang vier konkaver Kanten. Dabei muss sie natürlich durch Ecken verlaufen und das ist nur bei einem Innenwinkel von $\alpha \geq 90^\circ$ möglich. Es muss also noch gezeigt werden, dass dies im Bereich des Überganges der Konfigurationsräume der Fall ist. Hierfür benutzen wir die Gleichung 7.1 für den Innenwinkel und setzen $\alpha \geq 90^\circ$. Da für $180^\circ \geq \alpha \geq 90^\circ$ gilt: $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 0$, erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{2(R^2 + r^2) - 3L_R^2}{2(R^2 - r^2)} && R > r \\ 0 &\geq 2(R^2 + r^2) - 3L_R^2 \\ 2R^2 &\leq 3L_R^2 - 2r^2 \\ R &\leq \sqrt{\frac{3L_R^2 - 2r^2}{2}}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Veranschaulicht man diese Ungleichung auf dem Phasendiagramm, sieht man, dass der Innenwinkel im Bereich des Übergangs zum konvexen Dreieck immer 90° oder weniger beträgt (siehe Abb. 34). Der Graph der Funktion $R = \sqrt{\frac{3L_R^2 - 2r^2}{2}}$, entlang dem der Winkel genau 90° beträgt, schneidet den Bereich des konvexen Dreiecks erst in dem Punkt, der sich auf der Geraden $R = r$ befindet, also nicht mehr zum gültigen Bereich des Konfigurationsraums gehört. Damit wäre das Problem mit dem Durchlaufen der Ecken gelöst und

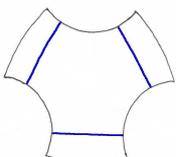
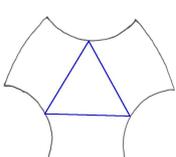
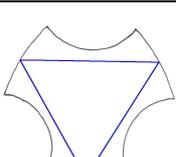
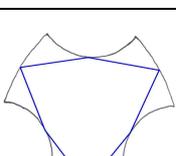
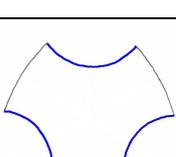
Geodäte	Aussehen	Länge in einem Konf.-blatt	Blattzahl	Beispiel
1		$G_1 = 2r$	2	
2		$G_2 = \sqrt{3}L_R - 2(R - r)$	4	
3		$G_3 = \sqrt{3}(L_R - (R - r))$	6	
4		$G_4 = \sqrt{3}((R + r) - L_R)$	6	
5		$G_5 = \sqrt{3(L_R - R)^2 + r^2}$	6	
6		$G_6 = (6 \arccos(\frac{-(4Rr+3L_R^2)}{2\sqrt{3}L_R(R-r)}) - \pi) \cdot (\frac{R-r}{3})$	4	

Tabelle 2: Hier sind die von mir gefundenen Geodäten aufgelistet. Die Bilder stellen die Geodäten nicht in einem bestimmten Konfigurationsblatt, sondern in dem universellen Konfigurationsblatt dar. Man sieht also den gesamten Weg. Mit der Blattzahl ist die Anzahl der durchlaufenen Konf.-blätter gemeint und die gemessenen Beispielwerte für die Gesamtlänge gehören zu der Konfiguration $R=12\text{cm}$, $r=7,5\text{cm}$ und $L_R = \sqrt{3} \cdot 20 \text{ cm}$. Auf die Herleitung der Gleichungen für die Länge wird verzichtet.

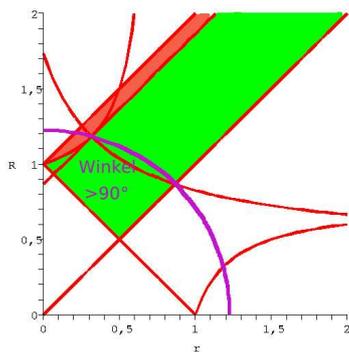


Abbildung 34:

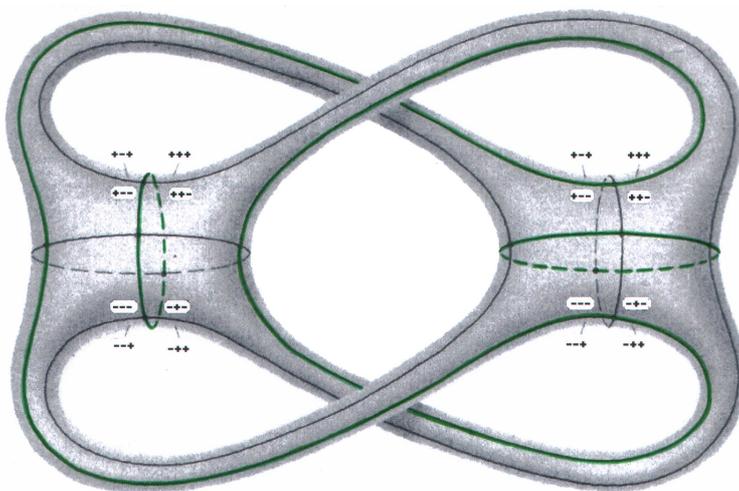


Abbildung 35: Hier sieht man die drei Homotopieklassen bzw. Geodäten, die sich beim Übergang zum konvexen Dreieck zusammenziehen. Sie sind grün gekennzeichnet.

gleichzeitig sehen wir, dass die Geodäte 6 sich möglicherweise beim Übergang zum Konfigurationsraum des konvexen Dreiecks zusammenzieht. Die folgenden Bilder ... bestätigen diese Vermutung sofort, denn bei diesem Übergang werden die konkaven Kanten kontinuierlich kürzer, bis sie schließlich ganz verschwinden. Außerdem gibt es drei solche Geodäten: wir haben 12 konkave Kanten und eine solche Geodäte verläuft entlang von vier Kanten. Damit haben wir jeweils eine für einen der Henkel der Fläche mit $g = 3$. Wie der eigentliche Übergang von dieser Fläche zur Sphäre aussieht, wird im Kapitel 9.1 erläutert.

Nun brauchen wir Geodäten für den anderen Übergang – den zum Konfigurationsraum des konkaven Dreiecks. Betrachten wir die aller kürzeste Kurve, die Geodäte 1. Unglücklicherweise gibt es unendlich viele zu ihr homotope Geodäten mit derselben Länge, denn sie verläuft entlang des Radius $R + r$. Außerdem wird sie zwar etwas kürzer, wenn man sich an den Übergang zum konvexen Dreieck annähert, verschwindet dann aber einfach, ohne sich zu einem Punkt zusammengezogen zu haben. Sie ist also nicht die gesuchte Geodäte.

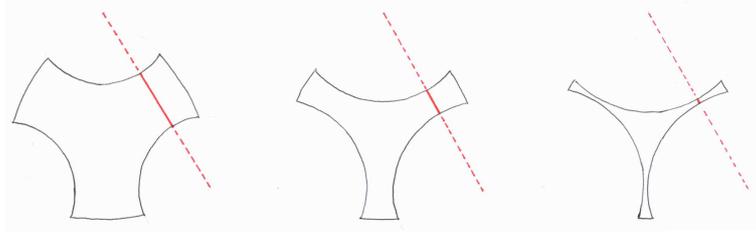


Abbildung 36: Die Geodäte 2 zieht sich beim Übergang zum konkaven Dreieck zusammenziehen.

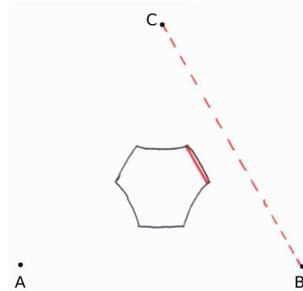


Abbildung 37: Wenn das Sechseck nicht im Dreieck ABC liegt, verläuft die Geodäte durch die Ecken.

Die drittkürzeste ist die Geodäte 2. Sie verläuft entlang der Geraden durch jeweils zwei Verankerungspunkte und damit senkrecht zu den konkaven Kanten. Betrachtet man einige charakteristische Bilder für die Annäherung an den Übergang, sieht man, dass sich diese Geodäte stetig zu einem Punkt zusammenzieht (siehe Abb. 36).

Hier taucht aber auch ein neues Problem auf: sie existiert nicht, wenn sich die Gerade, entlang derer die Geodäte verlaufen sollte, außerhalb des Sechsecks befindet. Es war zuerst unklar, wie es sein kann, dass sie nur bei einigen Konfigurationen existiert. Dann konnte sie eigentlich nicht zu den Erzeugern gehören. Aber die Tatsache, dass ihr Zusammenziehen kontinuierlich war, veranlasste mich dazu, genauer zu untersuchen, wie ihre Existenz von den Parametern abhängt.

Wenn das Gleichheitszeichen gilt, müssen wir wieder die Innenwinkel unter die Lupe nehmen. Im Diagramm sieht man, dass sie im Grenzfall genau 90° betragen und außerhalb des Existenzbereichs größer sind. Das würde bedeuten, dass diese Geodäte doch nicht verschwindet, sondern dass sie, sobald $\alpha \geq 90^\circ$, einfach immer durch die Ecken verläuft und nicht mehr senkrecht auf den konkaven Kanten steht (siehe Abb. 37). Sie ist ein anderer Vertreter dieser Homotopieklasse.

Die Gleichung für ihre Länge ist in solchen Fällen natürlich anders, aber ihr Verhalten bei der Annäherung an den Übergang ist genauso. Von diesen Homotopieklassen gibt es aufgrund der Symmetrie wieder drei auf jedem Konfigurationsblatt zu sehen. Eine Geodäte aus so einer Homotopieklasse läuft durch vier verschiedene der acht Konfigurationsblätter, also müsste es $\frac{8 \cdot 3}{4} = 6$ Geodäten und damit 6 Homotopieklassen geben. Jeweils zwei Geodäten gehören aber zur selben Klasse, was auf der Abb. 38 zu sehen ist, und damit haben wir wieder jeweils eine Homotopieklasse pro Henkel.

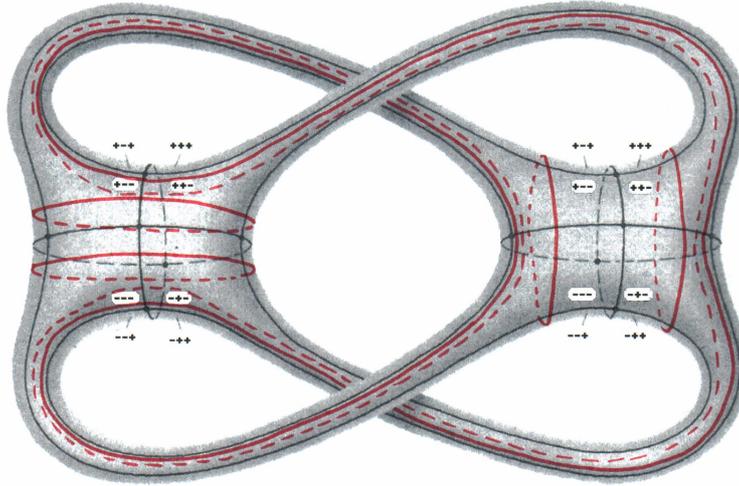


Abbildung 38: Hier sieht man die drei Homotopieklassen bzw. sechs Geodäten, die sich beim Übergang zum konkaven Dreieck zusammenziehen. Sie sind rot gekennzeichnet und verlaufen immer sehr nah an dem konvexen Kanten, berühren diese jedoch nicht.

Ich habe also auch Geodäten gefunden, die sich beim Übergang zum konkaven Dreieck zusammenziehen und habe damit das Übergangsproblems fast gelöst. Es bleibt nur noch, zu klären, ob das Verschwinden der Henkel dem Modell des 1- und 2-schaligen Hyperboloids entspricht, also der Hypothese.

8.3 Beispiel für die Bewegung der Doppelarme entlang einer Geodäte

Zur Besseren Vorstellung der Geodäten auf dem Konfigurationsraum, stelle ich am Beispiel der Geodäte 1 die zugehörige Bewegung der Doppelarme dar. Wir können zum Beispiel von dem Sechseck “+ + +, ausgehen. Der Ausgangspunkt der Kurve ist auf der oberen Kante des Sechsecks (Kante zu + + -), der Doppelarm C ist maximal eingeklappt. Dann bewegt sich der Punkt O geradlinig auf die untere Kante zu, wo der Doppelarm ausgestreckt ist. Bis jetzt hat die kleine Stange eine Drehung um 180° ausgeführt. Nun ist O im Sechseck + + -, er bewegt sich wieder auf die obere Kante zu und der Doppelarm C ist math. negativ eingerenkt. Dabei klappt sich der Doppelarm wieder ein und seine kleine Stange vollführt eine weitere halbe Drehung. Der Punkt O ist wieder in seiner Ausgangsposition und die kleine Stange hat eine volle Drehung gemacht. Die anderen beiden Doppelarme ändern bei der Bewegung entlang dieser Geodäte nur den Winkel zwischen der kleinen und der großen Stange, behalten aber ihren Einrenkungssinn.

9 Die Übergänge

9.1 Der Übergang vom Sechseck zum konvexen Dreieck

Um die Transformation der Fläche nachzuvollziehen, habe ich die drei gefundenen Geodäten, die für den ersten Übergang zur Sphäre verantwortlich sind, auf der Einbettung des Kon-

figurationsraums eingezeichnet. Zur Vereinfachung kann man die Kanten und Ecken weglassen.

In Wirklichkeit ziehen sich die drei Geodäten gleichzeitig zusammen und die Henkel verschwinden gleichzeitig. Aber um besser zu sehen, wie das im Einzelnen abläuft, kann man die Geodäten sich nacheinander zusammenziehen lassen.

Wenn sich die erste Geodäte zusammenzieht, wird die Fläche an einer Stelle immer schmaler, bis sie dort nur durch einen Punkt verbunden ist. Die Umgebung dieses Punktes sieht aus wie ein Doppelkegel. Das nächste Stadium wäre das Aufreißen der Fläche an dieser Stelle und das Verschwinden eines Henkels. Bei der zweiten Geodäte läuft es analog ab. Dann haben wir einen Torus und die letzte Geodäte ist übrig, die um den Henkel verläuft. Zieht sie sich zusammen, wird das „Loch“ des Torus immer kleiner, bis es zu einem Punkt degeneriert. Der Doppelkegel befindet sich diesmal im Inneren der Fläche und sie reißt im Inneren auf.

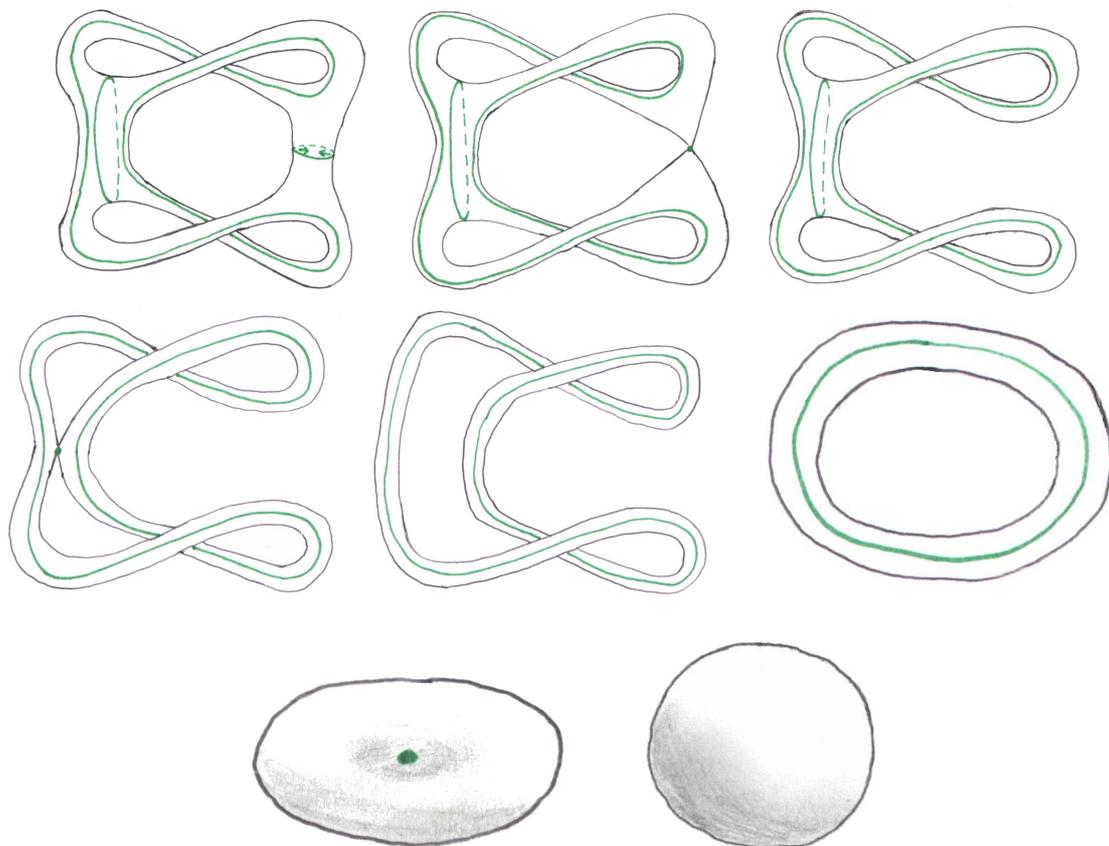


Abbildung 39:

Nimmt man diese drei Vorgänge zusammen, sieht die degenerierte „Fläche“ im Grenzfall an zwei Stellen wie ein Doppelkegel aus. Das liegt daran, dass die beiden Geodäten auf der linken Seite der Fläche sich umschließen und sich so zusammenziehen, dass die zwei Singularitätspunkte sich in einem vereinigen. Die Doppelkegel bedeuten, dass der Konfigurationsraum bei einer Grenzfallkonfiguration gar keine Fläche ist.

9.2 Der Übergang vom Sechseck zum konkaven Dreieck

Für die Darstellung des Zusammenziehens der Geodäten nehmen wir jeweils einen Repräsentanten aus einer Homotopieklasse. Zeichnen wir diese in die Fläche ohne Kanten und Ecken ein, sehen wir, dass diese Geodäten zu denen vom ersten Übergang gespiegelt sind, und zwar an der Achse, die die Fläche vertikal in der Mitte schneidet. Deswegen ist klar, dass die Fläche sich hier analog zu dem ersten Übergang verändert.

9.3 Zusammenfassung

Wir haben für jeden Übergang jeweils drei Homotopieklassen gefunden, die sich stetig zu einem Punkt zusammenziehen und so zum Verschwinden der Henkel führen. Natürlich sind diese Homotopieklassen nicht die einzigen, die sich so verhalten, denn es gibt unendlich viele Erzeuger und damit unendlich viele Homotopieklassen, die sich beim Verschwinden der Henkel zusammenziehen.

Die Begründung, dass die Geodäten 2 und 6 tatsächlich Beispiele für die gesuchten Erzeuger sind, erfolgt durch die Tatsache, dass ihr Zusammenziehen bei jeweils einem der Übergänge dem Modell aus dem Kapitel 6 entspricht. Allerdings sind die Geodäentypen vermischt. Bei beiden Übergängen haben wir zwei Geodäten, die um ein „Löcher“ der Fläche herumlaufen, und eine, die um einen Henkel herum verläuft. Außerdem vereinigen sich zwei der drei Doppelkegel in einem Punkt, da zwei der Geodäten sich umschließen. Das und die Vermischung der Typen entspricht zwar nicht dem Modell, aber grundsätzlich hat sich die Hypothese bestätigt. Der Übergang der Fläche vom Geschlecht 3 erfolgt durch das Zusammenziehen von drei längenminimierenden Kurven und entspricht dem Übergang des 1-schaligen Hyperboloids in den 2-schaligen. Im Grenzfall ist der Konfigurationsraum keine Fläche.

10 Zusammenfassung und weiterführende Problemstellungen

...

Im Laufe dieser Arbeit hat es sich oft so ergeben, dass mit einer neuen Lösung vorhandener Probleme, neue Fragestellungen auftraten. Das wichtigste Beispiel dafür ist die Frage nach dem Übergang der Flächen, die erst entstand, als ich feststellte, dass der Konfigurationsraum verschiedene Formen haben kann. Diese Frage machte dann einen großen Teil der Arbeit aus, aber andere Probleme konnten in dieser Zeit noch nicht bearbeitet werden. Einige von ihnen möchte ich aber trotzdem ansprechen.

In meinen Berechnungen betrachtete ich nicht den gesamten Konfigurationsraum, sondern ließ solche Konfigurationen weg, die als Konfigurationsblatt ein konvexes Dreieck mit Löchern ergeben. Sie ergeben sich wenn $R + r$ groß und $R - r$ klein genug sind. Die Kombinatorik der Kanten und Ecken ist hier viel komplizierter, denn so ein Dreieck hat sechs Kanten.

Eine Möglichkeit die Aufgabe zu erweitern ist, die Bedingung $R > r$ wegzulassen und alle $R, r \in \mathbb{R}$ zu erlauben. Dadurch würden sich auch andere Konfigurationen ergeben. Man könnte auch die Verankerungspunkte frei wählen, sodass sie sich nicht mehr in einem gleichseitigen Dreieck befinden. Dadurch wird der Konfigurationsraum unsymmetrisch.

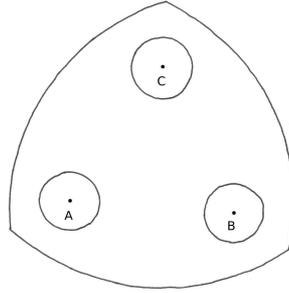


Abbildung 40: Das konvexe Dreieck mit drei Löchern.

Eine noch größere Erweiterung der Aufgabe wäre die Betrachtung der Konfigurationsräume von Gestängen mit einer anderen bzw. höheren Anzahl von Doppelarmen. Denkbar wäre zum Beispiel eine vorerst weniger genaue Betrachtung solcher verschiedener Konfigurationsräume und anschließend der Versuch eventuelle Zusammenhänge zwischen der Anzahl der Doppelarme und z.B. dem Geschlecht der Fläche zu finden.

Eine etwas andere Richtung wäre die Parametrisierung des Konfigurationsraums für das von mir untersuchte Gestänge. Man könnte eine Funktion aufstellen, die die Familie von Konfigurationsräumen beschreibt. Mit dieser könnte man dann z.B. ein Programm zur Darstellung der Konfigurationsblätter und des -raums schreiben, in Abhängigkeit aller möglichen Parameter, die in der Funktion beinhaltet sind.

Bildnachweise

- Abb. 1: siehe [3], Seite 92.
- Abb. 2: siehe [7], Seite 100.
- Abb. 3: siehe [7], Seite 96.
- Abb. 5: siehe [7], Seite 101.
- Abb. 10: mit Maple 9 erstellt.
- Abb. 12: mit Maple 9 erstellt.
- Abb. 14: mit Maple 9 erstellt.
- Abb. 15: (links) mit Maple 9 erstellt.
- Abb. 16: mit Maple 9 erstellt.
- Abb. 19: (links) unter <http://mathsyear2000.org/explorer/circles/images/sphere.gif> am 10.12.04 .
- Abb. 22: siehe [5], Seite 109.
- Abb. 23: mit Xfig 3.2.4 erstellt.
- Abb. 25: siehe [5], Seite 87.
- Abb. 26: siehe [1], Seite 9.
- Abb. 27: siehe [4], Seite 62.
- Tabelle 3.4: siehe [4], Seite 63.
- Abb. 29: mit Xfig 3.2.4 erstellt.
- Abb. 28: siehe [7], Seite 102(verändert).
- Abb. 30: siehe [7], Seite 102.
- Abb. 34: mit Maple 9 erstellt.
- Abb. 35: siehe [7], Seite 102(verändert).
- Abb. 38: siehe [7] , Seite 102(verändert).

Literatur

- [1] M.A. Armstrong: *Basic Topology*. Springer-Verlag, 1983.
- [2] V.G. Boltyanski, V.A. Efremovich: *Intuitive Combinatorial Topology*. Springer-Verlag, 2001.
- [3] S.Hawking: *Ein Universum in der Nußschale*. Hoffmann und Campe, 2002.
- [4] S. Huggett, D. Jordan: *A Topological Aperitif*. Springer-Verlag, 2000.
- [5] K. Jänich: *Topologie*. Springer-Verlag, 1996.
- [6] J. Jost: *Compact Riemann Surfaces*. Springer-Verlag, 2. Auflage.
- [7] W.P. Thurston, J.R. Weeks: *The Mathematics of Three-dimensional Manifolds*. Scientific American, 251, No. 1, July 1984, Seiten 94-106.
- [8] J.-P. Petit: *Das Topologikon*. Vieweg Verlag, 1995.