## III.13) Korollar:

Sei $f \in \mathcal{O}(A_{r,R}(z_0))$.

Dann hat $f(z)$ eine 1-dtge Reihendarstellung f.a. $z \in A_{r,R}(z_0)$

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z-z_0)^k}_{A(z)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k}_{B(z)}$$

so daß $A(z)$ lokal glchm. auf $\mathbb{C} \setminus (\overline{B_r(z_0)} \cup \{z_0\})$ gegen $f_-$, und $B(z)$ lokal glchm. auf $B_R(z_0)$ gegen $f_+$ konvergieren.

Es gilt: $\forall k \in \mathbb{Z}$: $a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$ f.a. $r < \rho < R$.

Beweis: $f = f_+ + f_-$ Zerlegung in Haupt- und Nebenteil

$\Rightarrow$ $f_+$ hat 1-dtge Darstellung $f_+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ mit lokal-glchm. Kvg. auf $B_R(z_0)$.

Sei $g : B_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$

$$g(z) = f_-\left(z_0 + \frac{1}{z}\right)$$

Riem. Hebb. Satz $\Rightarrow$ $g \in \mathcal{O}(B_{\frac{1}{r}}(0))$ mit $g(0) = 0$

$\Rightarrow$ $g$ hat 1-dige Darst.

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \quad \text{lokal glm. Konv. auf } B_{\frac{1}{r}}(0)$$

$\Rightarrow$ $f_-$ hat 1-dige Darst. $\displaystyle\sum_{k=-1}^{-\infty} \underbrace{b_{-k}}_{a_k} (z-z_0)^k$.

$\Rightarrow$ Bleibt Formel für $a_k$ zu zeigen: Sei $r < \rho < R$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f_+(\zeta) + f_-(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\rho(z_0)} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} a_l (\zeta - z_0)^{l-k-1} + \sum_{l=-1}^{-\infty} a_l (\zeta - z_0)^{l-k-1} \right] d\zeta$$

$$\underset{\text{glm. Konv. auf } \partial B_\rho(z_0)}{=} \sum_{l=0}^{\infty} a_l \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\rho(0)} \zeta^{l-k-1} \, d\zeta + \sum_{l=-1}^{\infty} a_l \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\rho(0)} \zeta^{l-k-1} \, d\zeta}_{= \delta_{l,k}} = a_k.$$

$= \delta_{l,k}$ (→ Bsp. zu Th. 1.2)

□

BRUNNEN

III.1.4 **Def:** Eine formale Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

heißt Laurentreihe. Sie heißt konvergent in $z'$

$:\Leftrightarrow$ sowohl $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z'-z_0)^n$ (Nebenteil)

als auch $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z'-z_0)^n$ ('Hauptteil') konvergieren.

Der Wert ist dann als die Summe von Haupt- und Nebenteil.

Entsprechend für glm./lokal glm. Kvg.

**Satz.** $f \in \mathcal{O}(A_{r,R}(a))$

$\Rightarrow$ $f$ besitzt eine 1-dtge auf $A_{r,R}(a)$ lokal glm. kvg. Laurentreihe

mit $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \, d\zeta$ f.e. $r<\rho<R$.

III.1.5 Bsp: $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2i)}$

Nenner hat Nullstellen in $\{1, -2i\}$

$\Rightarrow$ können 3 versch. Ringgebiete betrachten:

(1) $A_{0,1}(0)$, (2) $A_{1,2}(0)$, (3) $A_{2,\infty}(0)$.

PBZ: $f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2i} = \frac{(A+B)z + A2i - B}{(z-1)(z+2i)}$

$\Rightarrow A = -B$, $B = 2iA - 1$ $\Rightarrow 0 = (2i+1)A - 1$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2i+1}$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{1+2i}\left( -\frac{1}{z+2i} + \frac{1}{z-1} \right)$

(1) $|z| < 1$: $f(z) = \frac{1}{1+2i}\left( -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{z}{2i})} \right)$

$$= -\frac{1}{1+2i}\left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2i}\right)^n \right)$$

$$= -\frac{1}{1+2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^n \frac{1}{(2i)^{n+1}}\right) z^n$$

$$= -\frac{1}{1+2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{i^{-n}}{2^{n+1}}\right) z^n \in \mathcal{O}(B_1(0))$$

Also hier $f_- \equiv 0$, $f = f_+$.

(2) $1 < |z| < 2i$

$$f(z) = \frac{1}{1+2i}\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2i}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2i}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{1+2i}\left(\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2i}\right)^n z^n\right)$$

$$= \frac{1}{1+2i}\left(\sum_{k=-1}^{-\infty} z^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^{k+1} z^k\right) \in \mathcal{O}(A_{1,2}(0))$$

$$\Rightarrow f_- = \frac{1}{1+2i}\sum_{k=-1}^{-\infty} z^k, \quad f_+ = \frac{1}{1+2i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^{k+1} z^k$$

(3) $|z| > 2i$ $\quad f(z) = \frac{1}{1+2i}\left(\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{2i}{z}\right)}\right)$

$$= \frac{1}{1+2i}\sum_{k=-1}^{-\infty} z^k - \frac{1}{1+2i}\cdot\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-2i)^n\frac{1}{z^n}$$

$$= \frac{1}{1+2i}\sum_{k=-1}^{-\infty} z^k - \frac{1}{1+2i}\sum_{k=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{-2i}\right)^{k+1} z^k$$

$$= \frac{1}{1+2i}\sum_{k=-1}^{-\infty}\left(1-\left(\frac{i}{2}\right)^{k+1}\right) z^k = f_-, \quad f_+ \equiv 0$$

$f \in A_{2,\infty}(0)$.

BRUNNEN

# §2. Isolierte Singularitäten

III.2.1 Def.: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $U(z_0)$ eine offene Umgebung von $z_0$.

Dann heißt $U(z_0) \setminus \{z_0\}$ eine punktierte Umgeb. von $z_0$

Sei $f \in \mathcal{O}(U(z_0) \setminus \{z_0\})$.

Dann heißt $z_0$ eine isolierte Singularität von $f$.

Wir unterscheiden die 3 Fälle:

(a) Ex. Umgeb. $V(z_0) \subset U(z_0)$ sd. $f|_{V \setminus \{z_0\}}$ beschränkt

Dann heißt $z_0$ eine hebbare Singularität

(nach Riem. Hebbarkeitssatz ist $f$ holomorph nach $z_0$ fortsetzbar)

(b) $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$. Dann heißt $z_0$ ein Pol von $f$.

(c) Ex. $z_k \to z_0$ und $z_k' \to z_0$ mit

$|f(z_k)| \to \infty$ und $(|f(z_k')|)$ beschränkt.

Also $z_0$ weder hebbar noch Pol.

Dann heißt $z_0$ eine wesentliche Singularität von $f$.

III.2.2 Bsp.:

(a) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ hat hebbare Singularität in $0$.

(b) $f(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z+3i)^2}$ hat Pole in $1$ und $-3i$

(c) $f(z) = \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}$ hat isolierte Singularitäten in $\pi \cdot \mathbb{Z}$.

III.2.3 Def.: $f \in \mathcal{O}(U(z_0) \setminus \{z_0\})$ hat Pol in $z_0$

$:\Leftrightarrow$ $g = \frac{1}{f} \in \mathcal{O}(U(z_0) \setminus f^{-1}(0))$ hat Nullstelle in $z_0$

$\Leftrightarrow$ ex. $V(z_0) \subset U(z_0)$ und $h \in \mathcal{O}(V)$, $n \in \mathbb{N}$

s.d. $g(z) = (z-z_0)^n \cdot h(z)$, $h(z_0) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ ex. $V(z_0) \subset U(z_0)$ und $k \in \mathcal{O}(V)$, $n \in \mathbb{N}$

mit $f(z) = \frac{k(z)}{(z-z_0)^n}$ f.a. $z \in V$, $k(z_0) \neq 0$.

Dann heißt $z_0$ Pol $n$-ter Ordnung

Bsp.: $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$

$z^n \cdot e^{\frac{1}{z}}$ hat keine hebbare Sing. $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $e^{\frac{1}{z}}$ hat wesentliche Singularität in $0$.

**III.2.4 Satz:** Eine isolierte Singularität von $f$ ist genau dann ein Pol $n$-ter Ordnung

$\Leftrightarrow$ ex. $c_1, c_2 > 0$, $\varepsilon > 0$ mit

$$c_1 |z-z_0|^{-n} \leq |f(z)| \leq c_2 |z-z_0|^{-n} \text{ f.a. } |z-z_0| < \varepsilon$$

**Bew:** $z_0$ Pol $n$-ter Ordnung von $f$

$\Leftrightarrow$ ex. $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0)) \cap C^0(\overline{B_\varepsilon(z_0)})$, $k(z_0) \neq 0$

s.d. $f(z) = \frac{k(z)}{(z-z_0)^n}$

"$\Rightarrow$": Setze $c_2 = \max\limits_{\overline{B_\varepsilon(0)}} |k|$, $\min\limits_{\overline{B_\varepsilon(0)}} |k|$

"$\Leftarrow$": $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$. $\square$

**III.2.5 Satz von Casorati-Weierstraß**

Eine isolierte Singularität von $f \in \mathcal{O}(U(z_0) \setminus \{z_0\})$ ist genau dann wesentlich $\Leftrightarrow$

$\forall w_0 \in \mathbb{C}$ $\exists (z_n) \in (U(z_0) \setminus \{z_0\})^{\mathbb{N}}$ mit

$z_n \to z_0$ und $f(z_n) \to w_0$.

d.h. $\exists \varepsilon_0 > 0$ $\forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$: $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}) \subset \mathbb{C}$ dicht

"$\Rightarrow$": Angenommen $f(B_\varepsilon(z_0)\setminus\{z_0\})$ nicht dicht in $\mathbb{C}$

für ein $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow$ ex $w_0 \in \mathbb{C}$ und $B_\delta(w_0) \subset \mathbb{C}$ s.d.

$|f(z) - w_0| \geq \delta$ f.a. $|z| < \varepsilon$.

Setze $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - w_0} \Rightarrow g \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0)\setminus\{z_0\})$

$\Rightarrow$ $g(z)$ beschränkt bei $z_0$ $\Rightarrow$ $g$ hat hebbare Sing. in $z_0$

OBdA $g \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0))$

$\Rightarrow$ $f(z) = w_0 + \dfrac{1}{g(z)}$ holomorph mit

hebbarer Sing., falls $g(z_0) \neq 0$

oder Pol, falls $g(z_0) = 0$.

$\Rightarrow$ keine wesentliche Sing.

"$\Leftarrow$": klar. $\square$

III.26 **Satz:** Sei $f \in \mathcal{O}(A_{0,\varepsilon}(z_0))$

mit Laurentreihendarst. $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$

Dann gilt:

(i) $z_0$ ist hebbar $\Leftrightarrow$ $a_n = 0$ f.a. $n<0$
$\Leftrightarrow$ $f_- \equiv 0$

(ii) $z_0$ ist Pol $n$-ter Ordnung
$\Leftrightarrow$ $a_{-n} \neq 0$ und $a_k = 0$ $\forall k < -n$
$\Leftrightarrow$ $f_-(z) = p\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$, $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ Polynom $n$-ter Ordnung

(iii) $z_0$ ist wesentliche Sing. $\Leftrightarrow$ $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n<0$.

**Bew:** (i) $z_0$ hebbar $\Leftrightarrow$ ex. $\tilde{f} \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(0))$ mit $\tilde{f}|A_{0,\varepsilon}(0) = f$
$\Leftrightarrow$ Laurentreihe von $f$ = Taylorreihe von $\tilde{f}$
$\Leftrightarrow$ $\tilde{f} = f_+$, $f_- \equiv 0$.

(ii) $z_0$ Pol $n$-ter Ordnung $\Leftrightarrow$ $(z-z_0)^n \cdot f(z)$ hat hebbare Sing. in $z_0$

(iii) klar.

□

**III.2.7** Bsp. + Def.

(1) $f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{\cos z}{z} \cdot \frac{z}{\sin z}$

hat Pol 1. Ordnung in 0.

(2) $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{(-n)!} z^n$ hat wesentliche Sing. in 0.

(3) $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}[z]$ heißt ganze transzendente Fkt.

$\Rightarrow f(\frac{1}{z})$ hat wesentliche Singularität in 0.

**III.2.8** Def.: Für $U \subset \mathbb{C}$ offen, $P \subset U$ diskrete Teilmenge.

$f \in \mathcal{O}(U \setminus P)$ heißt eine

auf $U$ meromorphe Funktion

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ jeder Punkt $p \in P$ ist ein Pol für $f$.

Notation $f \in \mathcal{M}(U)$.

Bem.: $\boxed{\mathcal{M}(U) \text{ ist ein Funktionenkörper bzgl. } +, \cdot \text{ für } U \text{ Gebiet}}$

BRUNNEN

III.2.9 Satz: $f$ ist meromorph auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow$ $\forall z_0 \in U$ $\exists$ Umgeb. $V(z_0) \subset U$ und $g, h \in \mathcal{O}(V)$ s.d. $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ $\forall z \in V \setminus \{z_0\}$

Bew.: „$\Leftarrow$" $h(z_0) \neq 0 \Rightarrow f \in \mathcal{O}(V(z_0))$

$h(z_0) = 0 \Rightarrow$ OBdA $h(z) = (z-z_0)^n$ f.e. $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $z_0$ Pol $n$-ter Ordnung von $f$

„$\Rightarrow$" $z_0 \in U$ Pol von $f$ $\Rightarrow$ $f|_{V(z_0)} = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$ auf $V$

f.e. $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Bem.: Falls $f \in \mathcal{M}(U)$ mit nur endlich vielen Polen $z_1, \dots, z_N$ der Ordnungen $n_1, \dots, n_N$

$\Rightarrow$ $g(z) = \prod_{i=1}^{N} (z-z_i)^{n_i} \cdot f(z)$ hat nur hebbare Sing.

$\Rightarrow$ auf ganz $U$ läßt sich $f$ als Quotient zweier holom. Fkt. schreiben.

**III.2.10** **Satz:** Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

Dann ist $\mathcal{M}(G)$ ein Körper

bzgl. $f+g$, $f \cdot g$

**Bew.:** Übung.

**III.2.11** **Def.:** Sei $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ als Menge.

Eine Teilmenge $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ heißt

offen in $\hat{\mathbb{C}}$ $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} U \text{ offen in } \mathbb{C}, \text{ falls } \infty \notin U \\ \hat{\mathbb{C}} \setminus U \text{ ist kompakt, falls } \infty \in U. \end{cases}$

Die Mengen $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ für $K \subset \mathbb{C}$ kp.

heißen die offenen Umgebungen von $\infty$.

**Übung:** 1) Mit diesen offenen Mengen ist $\hat{\mathbb{C}}$

wieder ein topologischer Raum

2) Die stereographische Projektion

$$S^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$$

$$(x,y,z) \mapsto \frac{1}{1-z} \cdot (x + iy)$$

setzt sich durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \infty$ zu einem

Homöomorphismus $S^2 \cong \hat{\mathbb{C}}$ fort.

$\hat{\mathbb{C}}$ heißt die Riemannsche Zahlenkugel

Eine stetige Abb. $f: \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$

heißt holomorph $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

$$f|_{\mathbb{C}\setminus f^{-1}(\infty)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus f^{-1}(\infty))$$

$$\text{und } \frac{1}{f|_{\mathbb{C}\setminus f^{-1}(0)}} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus f^{-1}(0))$$

Eine stetige Abb. $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$

heißt holomorph $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

$f|_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ ist holomorph

und $g: \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ mit $g(z) = f|_{\hat{\mathbb{C}}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{z}\right): \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$

ist holomorph.

Übung: $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ ist holomorph

$\Leftrightarrow$ ~~fü~~ $g(z) = f|_{\mathbb{C}}\left(\frac{1}{z}\right)$ ist eine meromorphe Fkt

$g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ ohne wesentliche Singularität in $0$.

# §3. Residuen-Kalkül

III.3.1 **Def.:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $D \subset U$ diskret und $f \in \mathcal{O}(U \setminus D)$.

Sei $r > 0$ mit $\overline{B_r(z)} \cap D = \{z\}$ oder $\emptyset$.

Dann heißt

$$\operatorname{res}_z f := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z)} f(\zeta)\,d\zeta$$

das Residuum von $f$ in $z \in U$.

**Bem.:** (1) Sei $\tilde{\gamma} \subset U$ ein Zykel in $U$ mit

$n(\tilde{\gamma}, z) = 1$ und $n(\tilde{\gamma}, z') = 0$ für $z' \in D \setminus \{z\}$

Dann sind $\tilde{\gamma}$ und $\partial B_r(z)$ homolog $\setminus$ param.

und es folgt aus C.I.-Satz

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\partial B_r(z)} f(\zeta)\,d\zeta .$$

**Also:** $\displaystyle\int_{\tilde{\gamma}} f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_z f$ .

BRUNNEN

(2) Sei $z_0 \in D$ und $f \in \mathcal{O}(U \setminus D)$ mit Laurentreihenentw. $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$ um $z_0$ in $A_{0,R}(z_0)$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \,, \quad 0 < \rho < R$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{res}_{z_0} f = a_{-1}} \,.$$

Analog gilt: $\boxed{a_{-n} = \operatorname{res}_{z_0}\left( (z-z_0)^{n-1} \cdot f \right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}}$

**III.3.2** Beispiele (a) $\operatorname{res}_a \left( \frac{1}{z-a} \right) = 1$

(b) $\operatorname{res}_1 \left( \frac{1}{(z-1)(z+2i)} \right) = \frac{1}{1+2i}$ nach Bsp. III.1.5

(c) $\operatorname{res}_a \left( \frac{1}{(z-a)^n} \right) = 0$ für $n \geq 2$.

**III.3.3** Satz (Residuensatz) Für $U \subset \mathbb{C}$ offen, $D \subset U$ diskret, $f \in \mathcal{O}(U \setminus D)$ und $\Gamma \in Z_1(U)$ nullhomolog mit $\operatorname{sp}\Gamma \cap D = \emptyset$. Dann gilt

$$\boxed{\int_\Gamma f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \cdot \sum_{z \in U} n(\Gamma, z) \cdot \operatorname{res}_z f}$$

**Bem.:** $\Gamma$ kp $\Rightarrow$ $\{z \in U \mid n(\Gamma, z) \neq 0\}$ ist relativ kp. in $U$

außerdem $\{z \mid \operatorname{res}_z f \neq 0\} \subset D$ diskret

$\Rightarrow$ $\{z \in U \mid n(\Gamma, z) \cdot \operatorname{res}_z f \neq 0\}$ endlich

$\Rightarrow$ rechte Seite ist eine endliche Summe.

**Beweis:** $\Gamma$ kp. $\Rightarrow$ ex. höchstens endlich viele

nicht-hebbare Singularitäten $z_1, \dots, z_\nu$ von $f$ in $U$

mit $n(\Gamma, z_\nu) \neq 0$.

Sei $M = D \setminus \{z_1, \dots, z_\nu\}$, also $M$ diskret.

Sei $h_j$ = Hauptteil von $f$ auf $A_{0,\varepsilon}(z_j)$

also: $h_j(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_{nj} (z - z_j)^n \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{z_j\})$

$$\Rightarrow f - \sum_{j=1}^{\nu} h_j \in \mathcal{O}(U \setminus M)$$

$\Gamma$ nullhomolog in $U$, d.h. $n(\Gamma, z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus U$

Da $n(\Gamma, z') = 0$ f.a. $z' \in M$ $\Rightarrow$ $\Gamma$ nullhomolog in $U \setminus M$

$\Rightarrow$ C.I.-Satz II.5.7 anwendbar auf $f - \sum_{j=1}^{\nu} h_j$

$$\Rightarrow \int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{j=1}^{\nu} \int_\Gamma h_j(\zeta)\,d\zeta$$

$$\int_\Gamma h_j(\zeta)\,d\zeta = \int_\Gamma \sum_{n=-1}^{\infty} a_{n,j}(z-z_j)^n\,dz$$

$$= \sum_n \int_\Gamma \ldots \quad \text{, da glm. Kvg. auf } \Gamma$$

$$= \sum_{n=-1}^{-\infty} a_{n,j}\, 2\pi i\, \delta_{n,-1} \cdot n(\Gamma, z_j)$$

$$= a_{-1,j}\, 2\pi i\, n(\Gamma, z_j) = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z_j} f \cdot n(\Gamma, z_j)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} n(\Gamma, z_j) \cdot \operatorname{res}_{z_j} f} \qquad \square$$

III.34) **Def.** Ein Zykel $\Gamma \in Z_1(U)$ heißt <u>Randzykel eines Bereichs</u> $V \subset U$, wenn $\overline{V} \subset U$ kp., $\partial V = \operatorname{sp} \Gamma$, $n(\Gamma, z) = 1$ f.a. $z \in V$, $n(\Gamma, z) = 0$ f.a. $z \notin \overline{V}$

Folgerung: Sei $\overline{V} \subset U \subset \mathbb{C}$, $\overline{V}$ kp.

$\Gamma = \partial V$ Randzykel, $f \in \mathcal{O}(U \setminus D)$, $D$ diskret

$D \cap \operatorname{sp}\Gamma = \emptyset$. Dann gilt

$$\int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \cdot \sum_{z \in V} \operatorname{res}_z f$$

III 3.5

## Bleibt das Problem:

Wie kann man Residuen $\operatorname{res}_z f$ ohne Integration berechnen?

(1) $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$ Laurentreihe auf $B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$

$\Rightarrow \operatorname{res}_{z_0} f = a_{-1}$

(2) Sei $z_0$ Pol 1. Ordnung von $f$,

also $f(z) = \dfrac{k(z)}{z-z_0}$, $k \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0))$, $k(z_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{res}_{z_0} f = k(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)}$$

(3) Sei $z_0$ Pol $n$-ter Ordnung von $f$, $f(z) = \dfrac{k(z)}{(z-z_0)^n}$,

$k \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0))$, $k(z_0) \neq 0$

$$\Rightarrow k(z) = k(z_0) + k'(z_0)(z-z_0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} k^{(n-1)}(z_0)(z-z_0)^{n-1}$$

$$+ \frac{1}{n!} k^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n + \dots$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{k(z_0)}{(z-z_0)^n} + \frac{k'(z_0)}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \frac{k^{(n-1)}(z_0)}{z-z_0}$$

$$+ \frac{1}{n!} k^{(n)}(z_0) + \dots$$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_{z_0} f = \frac{k^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} = \frac{\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\left[(z-z_0)^n f(z)\right](z_0)}{(n-1)!}$$

(4) $h \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0))$ mit Nullstelle 1. Ordnung

$$\Rightarrow \quad res_{z_0}\left(\frac{1}{h}\right) \overset{(2)}{=} \lim_{z \to z_0}\left(\frac{z-z_0}{h(z)}\right) = \frac{1}{h'(z_0)}$$

(5) $g, h \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0))$, $h(z_0) = 0$ Nullstelle 1. Ordnung

$$\Rightarrow \quad res_{z_0}\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Bsp.: $\triangleright$ $res_1\left(\frac{1}{(z-1)(z+2i)}\right) = \frac{1}{1+2i}$

# §4. Anwendungen des Residuenkalküls

## III.4.1 Trigonometrische Integrale

Def: Wdh. $\mathbb{C}[x] = \{$ kpx. Polynome $p(x) = a_0 + \dots + a_n x^n \}$

$$\mathbb{C}(x) := \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{C}[x] \right\}$$

= rationale Fktionen in $z \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{C}(x,y) = \left\{ \frac{p(x,y)}{q(x,y)} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{C}[x,y] \text{ kpxe. Polynome in 2 Variablen} \right\}$$

Sei $R(x,y) \in \mathbb{C}(x,y)$

Ziel: Berechne $I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt$

Annahme: $t \mapsto R(\cos t, \sin t)$ sei stetig in $t$,

d.h. keine Singularität in $t$

Da $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

$$\Rightarrow I = \oint_{\partial B_1(0)} R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{1}{iz}\, dz,$$

denn $\frac{dz}{iz} = \frac{ie^{it}dt}{ie^{it}}$, für $z = e^{it}$

Also $I = \frac{1}{i} \oint_{\partial B_1(0)} \frac{g(z)}{h(z)}\, dz$, $\quad g(z) = R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right) \in \mathbb{C}(z)$

$h(z) = z$

$$\underset{\uparrow}{=} 2\pi \cdot \sum_{z \in B_1(0)} \operatorname{res}_z\left(\frac{g}{h}\right),$$ da kein Pol auf $\partial B_1(0)$ nach Voraus.

Residuensatz

$$= 2\pi \cdot \sum_{|z|<1} \operatorname{res}_z \left( \frac{1}{z} R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\right)$$

<u>Beispiel.</u> $R(x,y) = \frac{1}{1-2px+p^2}$, $\quad p \in \mathbb{C} \setminus S^1$ fester Parameter

$$R(\cos t, \sin t) = \frac{1}{1-2p\cos t+p^2} = \frac{1}{(p-\cos t)^2 + \sin^2 t}$$

$t \mapsto R(\cos t, \sin t)$ stetig $\Leftrightarrow$ $p \in \mathbb{C} \setminus S^1$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2p\cos\varphi+p^2} = 2\pi \cdot \sum_{|z|<1} \operatorname{res}_z \Bigg( \underbrace{\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-p(z+\frac{1}{z})+p^2}} \Bigg)$$

$$= \frac{1}{z - pz^2 - p + p^2 z}$$

$$= \frac{1}{(z-p)(1-pz)} =: \tilde{R}(z)$$

$\rightsquigarrow$ Pol 1. Ordnung in $p$ und $\frac{1}{p}$

~~Für alle $\cos t$ gilt~~ $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$, $z = e^{it}$

$\Rightarrow \frac{1}{1-2p\cos t+p^2} = \frac{z}{(z-p)(1+pz)}$, also keine Sing. auf $S^1$ $\Leftrightarrow$ $|p| \neq 1$.

$$\operatorname{res}_p \hat{R}(z) = \frac{1}{1-p^2}, \quad \operatorname{res}_{\frac{1}{p}} \hat{R}(z) = \lim_{z\to\frac{1}{p}} \left(z-\frac{1}{p}\right)\hat{R}(z)$$

$$= \left(-\frac{1}{p}\right) \lim_{z\to\frac{1}{p}} \frac{1}{z-p} = \left(-\frac{1}{p}\right)\cdot \frac{1}{\frac{1}{p}-p}$$

$$= \frac{1}{p^2-1}$$

Also.

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2p\cos\varphi+p^2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-p^2}, & |p|<1 \\ \frac{2\pi}{p^2-1}, & |p|>1 \end{cases}}$$

BRUNNEN

## III 4.3 Uneigentliche Integrale

Sei $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0 \}$

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen mit $\overline{\mathbb{H}} \subset U$

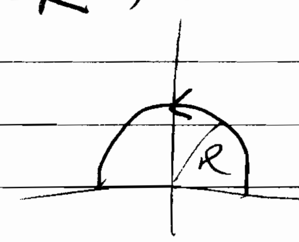
Sei $f \in \mathcal{O}(U \setminus D)$, $D$ endliche Menge von isolierten Sing. mit $D \cap \mathbb{R} = \emptyset$

Sei $\lim\limits_{z \to \infty} z \cdot f(z) = 0$ und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ Riem.-int'bar.

Dann gilt: $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \cdot \sum_{z \in \mathbb{H}} \operatorname{res}_z f}$$

Bew.: $D$ endlich $\Rightarrow$ ex. $R > 0$ mit $D \subset B_R(0)$

Sei $\Gamma_R$ pos. Orientierung von $\partial B_R(0) \cap \mathbb{H}$




z.B. $\Gamma_R(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$

Residuensatz $\Rightarrow$ $$\int_{-R}^{+R} f(x)\,dx + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{z \in \mathbb{H}} \operatorname{res}_z f$$

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz \right| \leq \pi R \max_{\operatorname{sp} \Gamma_R} |f| \to 0 \text{ für } R \to \infty.$$

Also $\lim\limits_{R \to \infty}$ $\Rightarrow$ Beh. $\square$

**Beispiel:**

① $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, Also: $\int_{\mathbb{R}} f\,dx$ Riemann-int'bar
und $\frac{z}{1+z^2} \to 0$ für $z \to \infty$

und $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$

$\Rightarrow$ genau 1 Pol in $\mathbb{H}$ und dieser 1. Ordnung

$$\mathrm{Res}_i f = \frac{1}{2i}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi$$

② $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$, $z f(z) = \frac{z^3}{1+z^4} \to 0$ für $z \to \infty$

Pole in $\mathbb{H}$: $\Leftrightarrow$ $1+z^4 = 0$, $\mathrm{Im}\, z \geq 0$

$$z = e^{i\varphi}, \quad 4\varphi = \pi + 2\pi\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ oder } \varphi = \frac{3}{4}\pi$$

$$\mathrm{res}_{e^{\frac{\pi}{4}i}} f = \frac{z^2}{4z^3}\Big|_{z=e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{4e^{\frac{3}{4}\pi i}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{res}_{e^{\frac{3}{4}\pi i}} f = \frac{z^2}{4z^3}\Big|_{z=e^{\frac{3}{4}\pi i}} = \frac{e^{\frac{3}{2}\pi i}}{4e^{\frac{9}{4}\pi i}} = \frac{e^{-\frac{3}{4}\pi i}}{4} = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4} = \frac{2\pi i}{4}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad //$$

III.4.3 Es gilt:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{m}{n}\pi} \quad \text{f.a. } m,n\in\mathbb{N} \text{ mit } 0<m<n$$

Bew: Sei $f(z) = \dfrac{z^{m-1}}{1+z^n}$

$$0<m<n \Rightarrow \lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$$

und $\int_0^\infty f(x)dx$ ex.

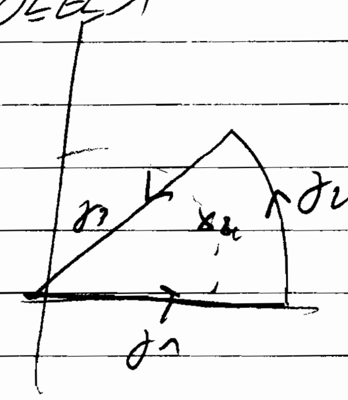
Betrachte den Pol 1. Ordnung in $z_0 = e^{\frac{\pi}{n}i}$

und die Wege $\gamma_1(t) = rt$, $0\le t\le 1$

$\gamma_2(t) = re^{it}$, $0\le t\le (\frac{1}{n}+\varepsilon)\pi$

$\gamma_3(t) = r(1-t)e^{(\frac{1}{n}+\varepsilon)\pi i}$, $0\le t\le 1$

für $r>1$ und $\varepsilon>0$ klein genug



Also Residuensatz $\Rightarrow \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} f(z)dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z_0} f$

mit $\operatorname{res}_{z_0} f = \left.\frac{z^{m-1}}{n z^{n-1}}\right|_{z=e^{\frac{\pi}{n}i}}$

$$= \frac{e^{\frac{m-1}{n}\pi i}}{n e^{\frac{n-1}{n}\pi i}} = \frac{1}{n} e^{\frac{m-n}{n}\pi i} = -\frac{1}{n} e^{\frac{m}{n}\pi i}$$

Für $\varepsilon = \frac{1}{n}$, also $\gamma_3(t) = r(1-t)\left(e^{\frac{2}{n}\pi i}\right.$ $= z_0^2$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_3} f(z)dz = -\int_0^1 \frac{r^{m-1} t^{m-1} z_0^{2(m-1)}}{1+r^n t^n} z_0^2 dt$$

$$= -z_0^{2m} \int_0^r f(t)dt$$

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \leq \sup_{\operatorname{Spur}\gamma_2} |f| \cdot \frac{2\pi r}{n} \to 0 \text{ für } r \to \infty$$

da $m<n$.

Also: $\lim_{r\to\infty}\left(\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz\right) = -\frac{2\pi i}{n} e^{\frac{m}{n}\pi i}$

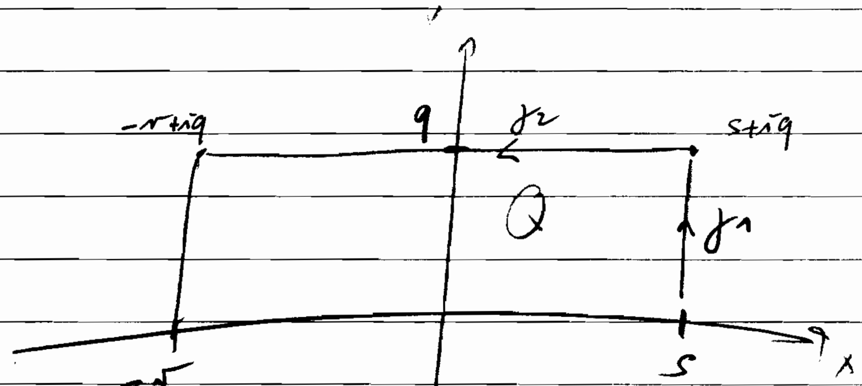
$$\int_0^\infty f(x)dx - e^{2\pi\frac{m}{n}i}\int_0^\infty f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty f(x)\,dx = -\frac{2\pi i}{n}\,\frac{e^{\frac{m}{n}\pi i}}{1-e^{2\pi\frac{m}{n}i}}$$

$$= \frac{2\pi i}{n}\,\frac{1}{e^{\frac{m}{n}\pi i}-e^{-\frac{m}{n}\pi i}} = \frac{\pi}{n}\,\frac{1}{\sin\frac{m}{n}\pi}$$

Bsp: $m=3,\ n=4 \Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sin\frac{3}{4}\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

**III.4.4** Betrachte Rechteck $[-r,s]\times[0,q]$, $0<q,r,s<\infty$.




**Satz:** Sei $U\subset\mathbb{C}$ offen mit $\overline{\mathbb{H}}\subset U$, $a>0$.

Sei $g\in\mathcal{O}(U\setminus D)$, $D$ endlich mit $D\cap\mathbb{R}=\emptyset$

und $\lim\limits_{z\to\infty} g(z)=0$.

Dann ex. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,e^{iax}\,dx$ und $= 2\pi i\cdot\sum_{z\in\mathbb{H}} \operatorname{res}_z\left(g(z)\,e^{iaz}\right)$

$=$

98

Beweis: Seien $q, r, s$ groß genug, s.d. $D \subset Q$

$$\gamma_2(t) = -t + iq, \quad -s \leq t \leq r, \quad |e^{iaz}| \leq e^{-ay}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\gamma_2} g(z) e^{iaz} dz \right| \leq (s+r) \cdot \max_{\mathrm{sp}\,\gamma_2} |g| e^{-aq}$$

Wähle $q = r+s$, also betrachte Quadrat

$\Rightarrow$ für $q \to \infty$ ist $\left| \int_{\gamma_2} g(z) e^{iaz} dz \right| \to 0$.

$$\left| \int_{\gamma_1} g(z) e^{iaz} dz \right| \leq \int_0^q |g(s+it)| e^{-at} dt$$

$$\leq \sup_{\mathrm{sp}\,\gamma_1} |g| \cdot \frac{1-e^{-aq}}{a} \leq \frac{1}{a} \cdot \sup_{\mathrm{sp}\,\gamma_1} |g| \to 0$$

für $q \to \infty$, $r$ fest

$$\Rightarrow \int_{-r}^{+\infty} g(x) e^{iax} dx + \int_{\gamma_3} g(z) e^{iaz} dz = 2\pi i \sum \mathrm{res} \ldots$$

ex.

Analog: $\left| \int_{\gamma_3} g(z) e^{iaz} dz \right| \to 0$ für $r, s, q \to \infty$

$$\Rightarrow \int_{-r}^{+\infty} g(x) e^{iax} dx \text{ ex. für } r \to 0$$

und $$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{z \in H} \mathrm{res}_z (g(z) e^{iaz}).$$ //

**Bsp.** $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\alpha^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{\alpha^2+x^2}\,dx \quad , \alpha > 0$

$g(z) = \frac{1}{\alpha^2+z^2}, \quad a = 1$

Pol. 1. Ordnung von $g(z)e^{iz}$ in $\mathbb{H}$ in $i\alpha$ mit Residuum $\frac{1}{2\alpha i}e^{-\alpha}$.

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos x}{\alpha^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\, 2\pi i \,\frac{e^{-\alpha}}{2\alpha i}$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} \quad //$$

## III.4.5) „Pole auf dem Rand"

**Hilfssatz:** Für $f \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$

und $z_0$ ein Pol 1. Ordnung

für $\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, $0 < \rho < \varepsilon$ ← Halbkreisweg

Dann gilt:

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho} f(\zeta)\,d\zeta = \pi i \operatorname{res}_{z_0} f$$

**Bew.:** $f(z) = \frac{c}{z - z_0} + g(z)$, $c \in \mathbb{C}$, $g \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0))$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_\rho} f(\zeta)\,d\zeta = c \int_0^\pi \frac{i\rho e^{it}\,dt}{\rho e^{it}} + \int_{\gamma_\rho} g(\zeta)\,d\zeta$$

$$= \pi i \operatorname{res}_{z_0} f + (\ \ ") \to 0 \text{ für } \rho \to 0.$$

$\boxtimes$

**Satz:** Für $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\overline{\mathbb{H}} \subset U$, $a > 0$

$g \in \mathcal{O}(U \setminus D)$, $D$ endlich, $D \cap \mathbb{R} = \{z_0\}$

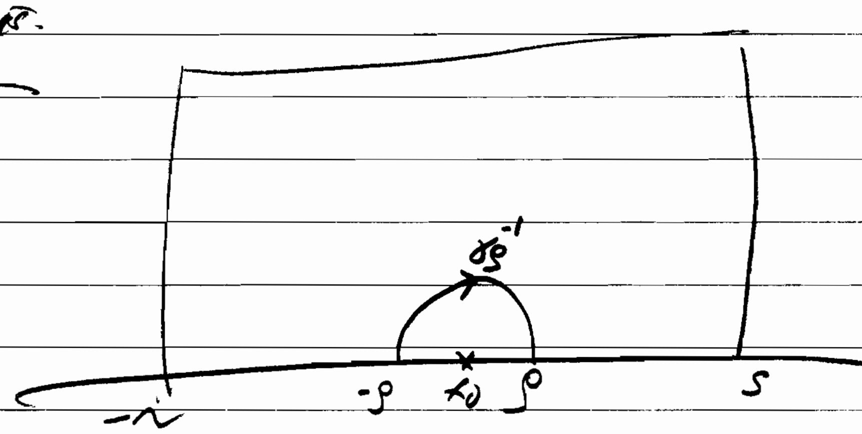
$z_0$ = Pol 1. Ordnung und $\lim_{z \to \infty} g(z) = 0$

Dann gilt: Falls diese existieren!

$$\int_{-\infty}^{x_0} g(x) e^{iax}\,dx + \int_{x_0}^{\infty} g(x) e^{iax}$$

$$= 2\pi i \cdot \sum_{z \in H} res_z\left(g(z)e^{iaz}\right) + \pi i\, res_{x_0}\left(g(z)e^{iaz}\right)$$

Beweis:




$$\Rightarrow \int_{-r}^{-\rho} f(\zeta)\,d\zeta + \underbrace{\int_{\gamma_\rho^{-1}} f(\zeta)\,d\zeta}_{\parallel} + \int_{\rho}^{s} f(\zeta)\,d\zeta + \dots = 2\pi i \sum_{z \in H} res$$

$$\lim_{\rho \to 0} = -\pi i\, res_{x_0} \dots$$

$\Rightarrow$ Beh.

$\square$

III.4.6 **Satz** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{M}(U)$ meromorph.

und $f \neq \text{const}$.

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Nullstellen von $f$ in $U$

$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Polstellen " " "

mit den Ordnungen $\operatorname{ord}_{a_n} f$, $\operatorname{ord}_{b_n} f$.

Dann gilt f.a. nullhomologen Zykel $\Gamma \in Z_1(U)$

mit $\operatorname{sp} \Gamma \cap \bigcup_n \{a_n, b_n\} = \emptyset$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_n n(\Gamma; a_n) \cdot \operatorname{ord}_{a_n} f$$

$$- \sum_n n(\Gamma; b_n) \cdot \operatorname{ord}_{b_n} f$$

**Bew:** $a_n$ Nullstelle der Ordnung $k$

$\Rightarrow$ lokal $f(z) = (z - a_n)^k \cdot g(z)$, $g(a_n) \neq 0$.

$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z-a_n)^{k-1} g + (z-a_n)^k g'}{(z-a_n)^k g}$$

$$= \frac{k}{z - a_n} + \frac{g'}{g}$$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_{a_n} \frac{f'}{f} = k$$

Sei $b_m$ Polstelle von $f$ der Ordnung $k$

$\Rightarrow$ lokal $f(z) = \frac{g(z)}{(z-b_m)^k}$, $g(b_m) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{(z-b_m)^k}{g} \cdot \frac{1}{(z-b_m)^{2k}} \left( g'(z-b_m)^k - g\,k\,(z-b_m)^{k-1} \right)$$

$$= \frac{g'}{g} - \frac{k}{z-b_m}$$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_{b_m} \frac{f'}{f} = -k.$$

Res. satz $\Rightarrow$ Beh. $\square$

„<u>Prinzip des Arguments</u>"

Für $\gamma$ geschlossener Weg in $U$, nullhomolog in $U$

Sei $g(z) = f(z) + w \in \mathcal{M}(U)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g'}{g-w}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{g\circ\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - w}$$

$$= n(g\circ\gamma, w)$$

$$= \sum_{a_i \in g^{-1}(w)} n(\gamma, a_i) \cdot \operatorname{ord}_{a_i}(g-w) - \sum_{\substack{b_i \text{ Polstelle} \\ \text{von } g}} n(\gamma, b_i) \cdot \operatorname{ord}_{b_i} g$$

III.4.7 **Satz:** Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet,

$f \in \mathcal{O}(G)$, $z_0 \in G$, $w_0 = f(z_0)$

so daß $\operatorname{ord}_{z_0}(f - w_0) = k$, $k \in \mathbb{N}$.

Dann ex. Umgeb. $V(z_0) \subset G$ sodaß

für $W = f(V)$ gilt:

- $W$ ist Umgebung von $w_0$
- $\forall\, w \in W \setminus \{w_0\}$ ist $\#(f^{-1}(w) \cap V) = k$

und $\operatorname{ord}_z(f - w) = 1$ f.a. $z \in f^{-1}(w) \cap V$.

Bew.: $\operatorname{ord}_{z_0}(f - w_0) \neq \infty \Rightarrow f \neq \text{const}$

Id.-Satz $\Rightarrow$ $f^{-1}(w_0)$ diskret und $(f')^{-1}(0)$ diskret

$\Rightarrow$ ex $\varepsilon > 0$ sd. $\overline{B_\varepsilon(z_0)} \subset G$ und

$f(z) \neq w_0$, $f'(z) \neq 0$ f.a. $z \in \overline{B_\varepsilon(z_0)} \setminus \{z_0\}$

Sei $\gamma \in Z_1(G)$ die pos. Ch. von $\partial B_\varepsilon(z_0)$.

Betrachte $f \circ \gamma \in Z_1(\mathbb{C})$ und

$K$ die Wegekomponente von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{sp}(f \circ \gamma)$, welche $w_0$ enthält.

BRUNNEN

III.4.6 $\Rightarrow \forall\, w \in \mathbb{C}\setminus sp(f\circ\gamma)$:

$$\sum_{z\in f^{-1}(w)\cap B_\varepsilon(z_0)} \mathrm{ord}_z(f-w)\cdot n(\gamma,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-w} = n(f\circ\gamma, w)$$

$=$ const innerhalb jeder Komponente von $\mathbb{C}\setminus sp(f\circ\gamma)$

Also Da $\mathrm{ord}_{z_0}(f-w_0) = k$

$$\Rightarrow \sum_{z\in f^{-1}(w)\cap B_\varepsilon(z_0)} \mathrm{ord}_z(f-w) = k \quad \text{f.a. } w\in K.$$

Außerdem: $f'(z)\neq 0$ f.a. $z\in \overline{B_\varepsilon(z_0)}\setminus\{z_0\}$

$\Rightarrow \mathrm{ord}_z(f-w) = 1$ f.a. $z \in f^{-1}(w)\cap B_\varepsilon(z_0)$

$\Rightarrow \#\left(f^{-1}(w)\cap B_\varepsilon(z_0)\right) = k$.

Setze $W = K$ und $V = f^{-1}(K)\subset B_\varepsilon(z_0)$ □

III.4.8 Korollar: Für $U\subset\mathbb{C}$ offen, $f\in\mathcal{O}(U)$, $z_0\in U$

Dann ex. Umgeb. $V(z_0)\subset U$ sodaß die Abb. $f: V(z_0)\to f(V) =: W$ Umgeb. von $f(z_0)$ bijektiv ist genau dann, wenn $f'(z_0)\neq 0$.

Beweis „$\Leftarrow$": Umkehrsatz

„$\Rightarrow$": III.4.7 $\Rightarrow \mathrm{ord}_{z_0}(f - f(z_0)) = 1$. □

## III.4.9 Satz von Rouché

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f, g \in \mathcal{O}(U)$

$\Gamma$ sei Randzyklus von $V$ ($\operatorname{sp}\Gamma = \partial V$),

$V \subset U$ offen, $\overline{V} \subset U$.

Dann gilt:

Falls $0 \leq |f(z) - g(z)| < |f(z)|$ f.a. $z \in \operatorname{sp}\Gamma$

so gilt: $$\sum_{z \in V \cap f^{-1}(0)} \operatorname{ord}_z f = \sum_{z \in V \cap g^{-1}(0)} \operatorname{ord}_z g.$$

**Beweis:** Betrachte die Homotopie $h_\lambda(z) = f(z) + \lambda(g(z) - f(z))$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Also $h_0 = f$, $h_1 = g$, $h_\lambda \in \mathcal{O}(U)$ f.a. $\lambda \in [0,1]$

Da $|\lambda(g-f)| < |f|$ f.a. $z \in \operatorname{sp}\Gamma$, $\lambda \in [0,1]$

$\Rightarrow h_\lambda(z) \neq 0$ f.a. $z \in \operatorname{sp}\Gamma$, $\lambda \in [0,1]$

III.4.6 $\Rightarrow$ $$N_\lambda := \sum_{z \in V \cap f^{-1}(0)} \operatorname{ord}_z h_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h_\lambda'(z)}{h_\lambda(z)}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z) + \lambda(g'(z) - f'(z))}{f(z) + \lambda(g(z) - f(z))}\, dz,$$ ist stetig in $\lambda \in [0,1]$

Außerdem $N_\lambda \in \mathbb{Z}$ f.a. $\lambda$ $\Rightarrow N_\lambda = \text{const} \Rightarrow N_0 = N_1$ $\square$

III. 4.10 **Anwendung:**

Bestimmung der Anzahl von Nullstellen

Bsp. 1 Sei $g(z) = z^4 - 4z + 2$,

$f(z) = -4z + 2$

$|z| = 1 \Rightarrow |z^4| = 1 < |-4z+2|$

$\Rightarrow |f - g| < |f|$

III 4.9 $\Rightarrow$ $f$ und $g$ haben in $B_1(0)$ gleich viele Nullstellen mit Vielfachheit gezählt

$\Rightarrow$ $g$ hat genau 1 Nullstelle mit $|z| < 1$.

# IV. Biholomorphe Abb.

## Vorbereitungen

Wdh: Jede biholomorphe Abb. $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$,

d.h. $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holom., $\phi^{-1}$ holom.

ist von der Form

$$\phi(z) = \lambda \frac{z-a}{\bar{a}z-1}, \quad a \in \mathbb{E}, \lambda \in S^1$$

Erk. Haben Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{E}) \cong \underbrace{\left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc=1 \right\}}_{=: PSL(2,\mathbb{R})}$$

Versuchen ebenso $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, $\mathrm{Aut}(G)$, $G \subset \mathbb{C}$

zu verstehen.

Wann sind zwei Gebiete $G, G'$ biholomorph äquivalent?

IV.01 **Def.** Sei $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ offen.

$f : U \to \mathbb{C}$ heißt holomorph

$\Leftrightarrow$ $f|_{U \setminus \{\infty\}}$ holomorph und

$\tilde{f}(z) = f|_{U\setminus\{\infty\}}\left(\frac{1}{z}\right)$ ist holomorph

$f : U \to \mathbb{C}$ heißt meromorph

$\Leftrightarrow$ $f|_{U\setminus\{\infty\}}$ und $\tilde{f}$ sind meromorph.

IV.02 **Satz** Jede holomorphe Funktion $f : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ ist konstant.

**Bew** $\hat{\mathbb{C}}$ kp. $\Rightarrow$ $f(\hat{\mathbb{C}})$ ist beschränkt

$\Rightarrow$ $f|_{\mathbb{C}}$ ist holomorph und beschränkt

Liouville $\Rightarrow$ $f|_{\mathbb{C}} = \text{const}$ $\Rightarrow$ $f = \text{const}$ $\boxtimes$

IV.03 **Satz.** Sei $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorph.

Dann ist $f$ rational, $f \in \mathbb{C}(z)$, d.h.

ex. $p, q \in \mathbb{C}[z]$ s.d. $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

<u>Beweis</u> $f$ meromorph $\Rightarrow$ nur diskrete Pole als Singularitäten

$\hat{\mathbb{C}}$ kp. $\Rightarrow$ nur endlich viele Pole

$$P_f = \{z_1, \ldots, z_m\} \subset \hat{\mathbb{C}}$$

Sei $z_j \in P_f \setminus \{\infty\}$ und $h_j$ der Hauptteil

der Laurentreihe von $f$ auf $B_\varepsilon(z_j) \setminus \{z_j\}$, $\varepsilon > 0$ klein

$f$ meromorph $\Rightarrow$ $h_j$ rational, $h_j$ holomorph auf $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_j\}$

Sei $p(z) = f(z) - \sum\limits_{z_j \in P_f \setminus \{\infty\}} h_j(z)$

$\Rightarrow$ $p \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, höchstens eine Polstelle in $\infty$

$\Rightarrow$ $p \in \mathbb{C}[z]$ $\Rightarrow$ $f(z) = p(z) + \sum h_j(z) \in \mathbb{C}(z)$. $\square$

IV.04. <u>Bsp.:</u> Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$

$T_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ def. durch

$$T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \in \mathbb{C}(z)$$

$\Rightarrow$ $T_A$ ist meromorph und bijektiv mit

$$T_A^{-1} = T_{A^{-1}}, \text{ denn}$$

$$T_A \circ T_B = T_{AB},$$

Bew: Schreibe $A \cdot \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T_A(z) = \frac{u}{v}$

Sei $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} \frac{u}{v} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\frac{u}{v}+b \\ c\frac{u}{v}+d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T_A(T_B(z)) = \frac{a\frac{u}{v}+b}{c\frac{u}{v}+d} = \frac{au+bv}{cu+dv} = T_{AB}(z)$

$AB\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

OBdA $\det A = 1 \Rightarrow T_A^{-1}(z) = \frac{dz-b}{a-cz}$

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$T_A(\infty) = \frac{a}{c}$, $T_A^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$

$T_A\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{a}{z}+b}{\frac{c}{z}+d} = \frac{bz+a}{dz+c}$

IV.0.5 **Def.:** Seien $G, G' \subset \hat{\mathbb{C}}$ offen und zshgd.

Eine meromorphe Fkt. $f \in \mathcal{M}(G)$, $f(G) = G'$ heißt holomorphe Abb. von $G$ auf $G'$.

$G, G'$ heißt biholomorph äquivalent

:$\Leftrightarrow$ ex. $f: G \to G'$ holomorph, bijektiv, und $f^{-1}: G' \to G$ holomorph.

## §1. $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ und $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$

IV.1.1 **Satz:** $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \mid f(z) = az+b,\ a,b \in \mathbb{C},\ a \neq 0 \}$

die ganzen linearen Abb.

**Beweis:** Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und $f$ bijektiv.

(1) Betrachte Taylorreihe von $f$.

Falls $f$ eine wesentliche Singularität in $\infty$ hat

III.2.5 (Casorati-Weierstraß) $\Rightarrow$ $f(\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)})$ liegt dicht in $\mathbb{C}$ für $R > R_0$.

$f(B_R(0))$ offen $\Rightarrow f(B_R(0)) \cap f(\mathbb{C}\setminus \overline{B_R(0)}) \neq \emptyset$

$\Rightarrow f$ nicht bijektiv. ↯

Also $f \in \mathbb{C}[z]$ Polynom.

② Angenommen $f$ hat Grad $n > 1$

$\Rightarrow f$ hat $n$ Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt)

$\Rightarrow f$ nicht bijektiv

$\Rightarrow$ Beh. ∎

IV.12 Satz $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = \{T_A : \hat{\mathbb{C}} \circlearrowleft \mid A \in GL(2,\mathbb{C})\} \overset{!!}{=} PSL(2,\mathbb{C})$

$T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Bew.: Haben bereits

$$T : GL(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$$
$$A \mapsto T_A$$

Gruppenhomom.

Sei $f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$

<u>Fall 1:</u> $f(\infty) = \infty \Rightarrow f|_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$

$$\Rightarrow f(z) = az + b, \quad a \neq 0$$

$$\Rightarrow f = T_A \text{ mit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Fall 2:</u> Sei $f(\infty) = c \in \mathbb{C}$ und

$$g(z) = \frac{1}{z-c} = T_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow h(z) = (g \circ f)(z) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$$

$$= T_{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow f = T_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow T : GL(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ ist surjektiv

$\Rightarrow$ <u>Beh.</u> $\square$

Beobachtung: $PSL(2,\mathbb{C}) = \{A \in GL(2,\mathbb{C}) \mid \det A = 1\} / \{\pm 1\}$

$$= SL(2,\mathbb{C}) / \{\pm 1\}$$

$\Rightarrow$ $T$ induziert Isom. $\boxed{PSL(2,\mathbb{C}) \cong \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})}$

BRUNNEN

IV.1.3 **Def:** Die Elemente der Automorphismengruppe $Aut(\hat{\mathbb{C}}) = PSL(2,\mathbb{C})$ heißen die (komplexen) Möbiustransformationen

Offenbar wird $Aut(\hat{\mathbb{C}})$ erzeugt durch

(a) Inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$

(b) Translation $z \mapsto z+b$

(c) Drehstreckung $z \mapsto a \cdot z$

IV.1.4 **Satz:** Jedes $T \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$ ist durch Festlegung von genau 3 (paarweise versch.) Bildpunkten $T(0) = z_1$, $T(1) = z_2$, $T(\infty) = z_3$ eindeutig bestimmt.

Wir haben einen Homöomorphismus ($Aut(\hat{\mathbb{C}}) = PSL(2,\mathbb{C})$)

$$\Phi : Aut(\hat{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} F^3\hat{\mathbb{C}} = \{(z_1,z_2,z_3) \in \hat{\mathbb{C}} \mid z_i \neq z_j \text{ für } i \neq j\}$$

$$T \mapsto (T(0), T(1), T(\infty))$$

BRUNNEN

Beweis:

a) $\Phi$ ist injektiv:

Sei $\operatorname{Fix} T = \{x \in \hat{\mathbb{C}} \mid T(x) = x\}$ für $T \in \operatorname{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$

Falls $T(z) = az + b \Rightarrow \operatorname{Fix} T = \{\infty\}$, falls $a = 1$
$\operatorname{Fix} T = \{\infty, \frac{b}{1-a}\}$, falls $a \neq 1$

Falls $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{Fix} T = \{z \mid cz^2 + (d-a)z - b = 0\}$

Also $\forall_{T \neq id} T \in \operatorname{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) : \# \operatorname{Fix} T = 1$ oder $2$

Angenommen $\Phi(T_1) = \Phi(T_2)$, d.h. $T_1(0) = T_2(0)$
$T_1(1) = T_2(1)$
$T_1(\infty) = T_2(\infty)$

$\Rightarrow T_2^{-1} \circ T_1$ hat mindestens 3 Fixpunkte

$\Rightarrow T_2^{-1} \circ T_1 = id \Rightarrow T_1 = T_2$

BRUNNEN

b) Seien $(z_1, z_2, z_3) \in F^3\hat{\mathbb{C}}$

Dann def. wir das sogenannte

Doppelverhältnis für $z \in \hat{\mathbb{C}}$

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) := \frac{z - z_1}{z - z_3} \Big/ \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$$

$$= \frac{(z - z_1) \cdot (z_2 - z_3)}{(z - z_3) \cdot (z_2 - z_1)} \in \begin{cases} \hat{\mathbb{C}}, \\ \mathbb{C}, \text{ falls } z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2, z_3\} \end{cases}$$

Sei $z \in \hat{\mathbb{C}}$ und definiere

$$T(z) := DV(z, z_1, z_2, z_3) \in \hat{\mathbb{C}}$$

Offenbar ist $T \in PSL(2, \mathbb{C})$

und es gilt

$$T(z_1) = 0$$
$$T(z_2) = 1$$
$$T(z_3) = \infty$$

Also $\Phi(T^{-1}) = (z_1, z_2, z_3)$

$\Rightarrow \Phi$ surjektiv.

und $\Phi^{-1}(z_1, z_2, z_3) = \left(z \mapsto DV(z, z_1, z_2, z_3)\right)^{-1}$

c) Offenbar ist $\Phi$ in beide Richtung stetig, also ein Homöomorphismus $\square$

IV.1.5 **Korollar:** Die Gruppe $PSL(2,\mathbb{C})$ ist eine 6-dim Mfg. und nicht-kp.

IV.1.6 **Satz:** Das Doppelverhältnis ist eine Invariante gebrochen linearer Transf., d.h.

$$DV(Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3) = DV(z, z_1, z_2, z_3)$$

f.a. $T \in PSL(2,\mathbb{C})$.

**Bew:** Sei $\psi(z) := DV(z, Tz_1, Tz_2, Tz_3)$

$\Rightarrow \psi \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$

$\Rightarrow DV(Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3) = \psi(Tz)$

Sei $\phi = \psi \circ T \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$

$\Rightarrow \phi(z_1) = 0, \ \phi(z_2) = 1, \ \phi(z_3) = \infty$

$\Rightarrow \phi = DV(\cdot, z_1, z_2, z_3) \Rightarrow$ Beh. $\square$

BRUNNEN

IV 1.7 **Satz:** Möbiustransformationen $T \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$

bilden Geraden oder Kreise

auf Geraden oder Kreise ab.

( Gerade = Kreis durch $\infty$ )

$K \subset \hat{\mathbb{C}}$ ist echter Kreis $\Leftrightarrow$

$\infty \notin K$ und ex. $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < r < \infty$

mit $K = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r \}$

$|z - z_0| = r \Leftrightarrow (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2$

$\Leftrightarrow z\bar{z} - (z_0\bar{z} + \bar{z}_0 z) + z_0\bar{z}_0 = r^2$

$\Leftrightarrow |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = r^2$

Also $K$ echter Kreis $\Leftrightarrow$ $K = \{ \alpha z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0 \mid \alpha, \delta \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{C},\ c\bar{c} > \alpha\delta,\ \alpha \neq 0 \}$

$z_0 = -\frac{c}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\alpha} = |z_0|^2 - r^2$
$= \frac{|c|^2}{\alpha^2} - r^2$

$\rightsquigarrow r^2 = \frac{|c|^2 - \alpha\delta}{\alpha^2}$

$K$ Gerade $\Leftrightarrow$ $\alpha = 0$, d.h. $r = \infty$, $z_0 = \infty$

**Rest:** Übung