II 2.6 Alternativer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra I.1.1:

Sei $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, $p \neq \text{const}$

$\Rightarrow \lim_{|z| \to \infty} |p(z)| = \infty \Rightarrow \lim_{|z| \to \infty} \frac{1}{|p(z)|} = 0$

Angenommen $p(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow \frac{1}{p(z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

$\Rightarrow \frac{1}{p(z)}$ ist beschränkte, ganze Funktion

Satz von Liouville $\Rightarrow p(z) = \text{const}$ ↯ $\square$

§3. Analytische Funktion

Wissen (I.2.11): Jede Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

mit Konvergenzradius $r \in (0, \infty]$

beschreibt eine holomorphe, ∞-oft $\mathbb{C}$-diff'bare

Funktion $f \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$.

Sei nun umgekehrt

$U \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(U)$.

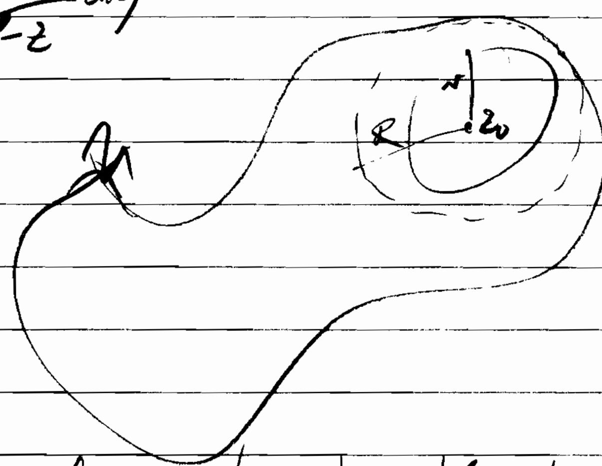
Sei $z_0 \in U$ gegeben und wähle

$$R = \sup\{r > 0 \mid B_r(z_0) \subset U\}$$

Sei $0 < r < R$ und $|z - z_0| < r$

Dann gilt nach Cauchy-Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$



Haben

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \cdot \frac{1}{\zeta - z_0}$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n} \quad \text{f.a. } |z - z_0| < |\zeta - z_0| = r.$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta) \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}}_{\substack{\text{kvg. gleichmäßig auf } \partial B_r(z_0) \\ \text{als Funktionenreihe in } \zeta}} \, d\zeta$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{mit}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

kvg. f.a. $z \in B_r(z_0)$.

$\Rightarrow f$ ist entwickelbar in Potenzreihe um z_0

mit Kv.radius $\geq R$.

Also gilt

II.3.1 **Satz:** Sei $f \in \mathcal{O}(U)$, $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$

$\Rightarrow f$ ist analytisch, entwickelbar in Potenzreihe um $z_0 \in U$

mit Kv.-Radius $R \geq \sup\{r > 0 \mid B_r(z_0) \subset U\}$.

und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

für $0 < \rho < R$.

II.3.2 **Korollar:** Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

Potenzreihe mit Kv.-Radius $0 < r < \infty$.

Dann existiert für keine offene Umgebung U von $\overline{B_r(z_0)}$

eine holomorphe Fortsetzung $\hat{f} \in \mathcal{O}(U)$, $\hat{f}|_{B_r(z_0)} = f$.

Beispiel zu II 3.2:

$$f(z) = \operatorname{Log} z\,, \quad f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n} \quad \text{Kv.radius} = 1$$

II 3.3 Satz (Zusammenfassung)

Sei $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ offen

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist holomorph in U
2. f besitzt lokale Stammfunktion
3. $f \in C^1(U)$ und $\bar{\partial} f = 0$
4. f ist analytisch in U.

II.3.4 Def.: Sei $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $f(z_0) = 0$, $z_0 \in U$.

Dann heißt z_0 eine Nullstelle der Ordnung n

$\Leftrightarrow$ $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$

und $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Schreibe $\mathrm{ord}_{z_0} f = n$.

Falls $f(z_0) = 0$ und keine Nullstelle endlicher Ordnung

dann hat f eine Nullstelle der Ordnung ∞ in z_0.

II.3.5 Lemma:

Sei $f \in \mathcal{O}(U)$, $z_0 \in U$.

f hat Nullstelle in z_0 mit $\mathrm{ord}_{z_0} f = n$

$\Leftrightarrow$ $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ mit pos. Konv.radius

$\Leftrightarrow$ ex. $g \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0))$ mit $g(z_0) \neq 0$

und $f(z) = g(z) \cdot (z-z_0)^n$

Beweis: Übung.

II.3.6 **Satz** (Identitätssatz)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f, g \in \mathcal{O}(G)$

Dann ist äquivalent:

(i) $f \equiv g$

(ii) ex $z_0 \in G$ mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

(iii) ex nicht-diskrete Menge $N \subset G$ mit $f|_N \equiv g|_N$.

Beweis: OBdA $g \equiv 0$.

(i) $\Rightarrow$ (iii): klar

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Sei $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset N$ mit $z_k \to z_0 \in N$, $z_k \neq z_0$ $\forall k$

also $f(z_k) = 0 = f(z_0)$.

Taylorentw. von f um z_0:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

Angen. ex $n \in \mathbb{N}$ mit $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Sei $n_0 = \min \{ n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0 \}$.

$\Rightarrow a_0 = a_1 = \ldots = a_{n_0 - 1} = 0$.

$\Rightarrow f(z) = a_{n_0}(z-z_0)^{n_0} + a_{n_0+1}(z-z_0)^{n_0+1} + \ldots$ in $B_\varepsilon(z_0)$.

Betrachte $z_k \in B_\varepsilon(z_0)$, $k \geq k_0(\varepsilon)$

$$\Rightarrow 0 = (z_k - z_0)^{n_0}\Big[\underbrace{a_{n_0} + (z_k - z_0)\big(\overbrace{a_{n_0+1} + a_{n_0+2}(z_k - z_0) + \ldots}^{=: g(z_k)}\big)}_{=0}\Big]$$

$z_k \neq z_0$

$$\Rightarrow 0 = a_{n_0} + (z_k - z_0)\, g(z_k), \quad a_{n_0} \neq 0.$$

$$g(z) = \sum_{j=n_0+1}^{\infty} a_j (z-z_0)^{j-(n_0+1)}, \quad g \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0))$$

$$\Rightarrow g \text{ stetig in } z_0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \big(a_{n_0} + (z_k - z_0)\, g(z_k)\big) = 0$$

$$\Rightarrow a_{n_0} = 0 \quad \text{↯}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $X = \{z \in G \mid f(z) = 0,\ z \text{ Nullstelle der Ord. } \infty\}$

(iii) $\Rightarrow X \neq \emptyset$

$f^{(n)}$ stetig f.a. $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow X$ abg. in G

Sei $\tilde{z} \in X \Rightarrow 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\tilde{z})}{n!}(z-\tilde{z})^n$ | Kr. radius $r > 0$

$\Rightarrow f|_{B_r(\tilde{z})} \equiv 0 \Rightarrow B_r(\tilde{z}) \subset X$

$\Rightarrow X$ offen.

G zusammenhängend $\Rightarrow X = G \Rightarrow f \equiv 0$ auf G

$\square$

II.3.7 **Korollar** (Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $N \subset D$ eine Menge mit einem Häufungspunkt in D und sei $f: N \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

Falls $\hat{f} \in \mathcal{O}(D)$ mit $\hat{f}_{|N} \equiv f$ so ist $\hat{f}$ eindeutig bestimmt.

Bsp. ① Die komplexen Funktionen $\sin z$, $\cos z$, $\exp z$ sind eindeutig bestimmt durch die reellen Fkt.

② Sei $\ell: G \to \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus und $N = G \cap \mathbb{R}$ habe einen Häufungspunkt in $(0,\infty)$.

Dann gilt $\ell_{|G \cap (0,\infty)} = \log_{|G \cap (0,\infty)}$

$\Rightarrow$ ℓ 1-dtg. bestimmt.

③ Prinzip der Permanenz der Funktionalgleichung

$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow e^{z+w} = e^{z} \cdot e^{w} \quad \forall z,w \in \mathbb{C}$,

$\sin(z + 2\pi) = \sin z$, ..., $\boxed{e^{\pi i} = -1}$

§4. Cauchy-Ungleichung

II.4.1 Satz (Cauchy-Ungleichung)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen mit $\overline{B_r(z_0)} \subset U$

und $f \in \mathcal{O}(U)$. Dann gilt f.a. $0 < \delta \leq r$ und $|z - z_0| < r - \delta$

$$\boxed{|f^{(n)}(z)| \leq \frac{r}{\delta} \frac{n!}{\delta^n} \max_{\partial B_r(z_0)} |f|}$$

Bew.: Cauchy-Integralformel

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right|$$

$z \in \overline{B_{r-\delta}(z_0)}$, $\delta > 0$, $|\zeta - z| \geq \delta$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi r \frac{1}{\delta^{n+1}} \max_{\partial B_r(z_0)} |f| . \qquad \square$$

II.4.2 Folgungen

(a) Falls $\delta = r \Rightarrow |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{\partial B_r(z_0)} |f|$.

(b) Taylorreihe um z_0 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} (z - z_0)^n$

Wurzelkrit. $\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{r} \sqrt[n]{\max_{\partial B_r(z_0)} |f|} \Rightarrow$ Kv.-Radius $\geq r$

wie in Satz II.3.1.

II.4.3 Satz von Weierstraß

Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(G)$

mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig

Dann ist $f \in \mathcal{O}(G)$ und $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ lokal gleichm. f.a. $k \in \mathbb{N}$.

Bem: Das ist falsch im Reellen! Approximierbarkeit durch glatte Fkt, Bsp $f(x) = |x|$

Bew.: Schritt 1: Beh. f besitzt überall eine lokale Stammfunktion

Bew.: Es genügt zu zeigen, daß $\oint_{\partial\Delta} f\,dz = 0$ f.a. $\Delta \subset G$.

Sei $\Delta \subset G$, dann Δ kompakt

$f_n \to f$ lokal gleichm. $\Rightarrow$ $f_n \to f$ gleichm. auf $\partial\Delta$

$\Rightarrow$ $\oint_{\partial\Delta} f\,dz = \lim_{n\to\infty} \oint_{\partial\Delta} f_n\,dz = 0$, da $f_n \in \mathcal{O}(G)$

Also ist auch $f \in \mathcal{O}(G)$.

Schritt 2: Sei $\overline{B_r(z_0)} \subset G$ und $\varepsilon > 0$.

Setze $\delta = \frac{r}{2}$, wende Cauchy-Ungleichung auf $f^{(k)} - f_n^{(k)}$ an,

$\Rightarrow \forall z \in \overline{B_{\frac{r}{2}}(z_0)}: \; |f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z)| \leq 2^{k+1} \frac{k!}{r^k} \max_{\partial B_r(z_0)} |f - f_n|$

$\Rightarrow \max_{\overline{B_{\frac{r}{2}}(z_0)}} |f^{(k)} - f_n^{(k)}| \to 0$

$\max_{\partial B_r(z_0)} |f - f_n| \to 0$ da $f_n \to f$ lokal glm.

$\Rightarrow f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ lokal glm. $\square$

(II.4.4) Lemma: Sei $f \in \mathcal{O}(U)$, $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\overline{B_r(z_0)} \subset U$.

Angenommen $|f(z_0)| < \min_{\partial B_r(z_0)} |f|$,

dann ex. Nullstelle $z' \in B_r(z_0)$, $f(z') = 0$.

Beweis: Angen. $f(z) \neq 0$ f.a. $z \in B_r(z_0)$

$\Rightarrow f \neq 0$ auf $\overline{B_r(z_0)}$

$\Rightarrow g(z) = \frac{1}{f(z)} \in \mathcal{O}(U')$, U' offene Umgebung von $\overline{B_r(z_0)}$

Cauchy-Ungl. $\Rightarrow |g(z_0)| \leq \max_{\partial B_r(z_0)} |g|$

$\Rightarrow |f(z_0)| \geq \frac{1}{\max_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{|f|}} = \min_{\partial B_r(z_0)} |f|$ ↯ $\square$

II.4.5 Satz von der Gebietstreue

Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f \in \mathcal{O}(G)$

und f nicht konstant.

Dann ist $f(G)$ wieder ein Gebiet,
also insbesondere offen.

Bem: vgl. Offenheitssatz, zusätzl. Vorauss. $f' \neq 0$.

fällt nun weg.

Bew.: G Gebiet, f stetig $\Rightarrow f(G)$ wegzusammenhängend.

Sei $w_0 \in f(G)$, also $w_0 = f(z_0)$.

Z.z.: Ex. $\varepsilon > 0$ s.d. $B_\varepsilon(w_0) \subset f(G)$

Schritt 1: Ex. $r > 0$ s.d. $w_0 \notin f(\partial B_r(z_0))$

Bew: Andernfalls hat $f^{-1}(w_0)$ z_0 als Häufungspunkt in G

Identitätssatz $\Rightarrow f \equiv w_0 = \text{const}$ $\lightning$.

Schritt 2: Betrachte $g(z) = f(z) - w_0$, also $|g_{|\partial B_r(z_0)}| > 0$

$\Rightarrow$ ex. $\varepsilon > 0$ s.d. $\min_{\partial B_r(z_0)} |g| \geq 3\varepsilon > 0$.

Für $w \in B_\varepsilon(w_0)$ ~~und~~ setze $h(z) = f(z) - w$

$$\Rightarrow \min_{\partial B_r(z_0)} |h| \geq \cancel{\min}_{\partial B_r(z_0)} \left(|f(z) - w_0| - |w - w_0| \right) \geq 3\varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon$$

Außerdem $|h(z_0)| = |f(z_0) - w| = |w_0 - w| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Vorauss. für Lemma II.4.4 erfüllt $\Rightarrow$ h hat Nullstelle in $B_r(z_0)$

$\Rightarrow$ ex. $z' \in B_r(z_0)$ mit $f(z') = w$

$\Rightarrow$ $B_\varepsilon(w_0) \subset f(B_r(z_0)) \subset f(G)$.

$\square$

II.4.6 Korollar aus Gebietstreue:

(a) $f \in \mathcal{O}(G)$, G Gebiet. Dann gilt

$\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ oder $|f|$ konst $\Rightarrow$ f konst.

(b) Maximums-Prinzip: Sei G Gebiet, $f \in \mathcal{O}(G)$. Dann:

(i) $|f|$ mit lokalem Maximum in $z_0 \in G$ $\Rightarrow$ f konst

(ii) G beschränkt und $f \in \mathcal{O}(G) \cap C^0(\overline{G})$

$$\Rightarrow |f(z)| \leq \max_{\xi \in \partial G} |f(\xi)| \quad \forall z \in \overline{G}$$

d.h. $|f|$ nimmt Maximum auf ∂G an.

c) <u>Minimums-Prinzip</u>: $f \in \mathcal{O}(G)$, G Gebiet.

Dann: (i) $|f|$ lokales Minimum in $z_0 \in G \Rightarrow f(z_0) = 0$ oder $f = \text{const}$

(ii) G beschränkt und $f \in \mathcal{O}(G) \cap C^0(\overline{G})$

$\Rightarrow f^{-1}(0) \cap G \neq \emptyset$ oder $|f|$ nimmt Minimum auf ∂G an.

<u>Beweis</u>. a) $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ oder $|f|$ konst $\Rightarrow f(G)$ nicht offen.

b) Für $U(z_0) \subset G$ mit $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ $\forall z \in U(z_0)$

$\Rightarrow f(U) \subset \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq |f(z_0)|\} = \overline{B_{|f(z_0)|}(0)}$

$f(z_0) \in \partial \overline{B_{|f(z_0)|}(0)}$

$\Rightarrow f(U)$ nicht offen $\Rightarrow f \equiv f(z_0)$ in Umgeb. von z_0

$\Rightarrow f \equiv f(z_0) = \text{konst.} \Rightarrow$ (i)

(ii) direkt aus (i)

c) ersetze f durch $\frac{1}{f}$.

$\boxtimes$

II.4.7 Anwendungen auf holomorphe Selbstabbildungen der Einheitskreisscheibe

Def.: Sei $\mathbb{E} := B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

II.4.7.1 Satz (Schwarzsches Lemma)

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ mit $f(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$

und $f(0) = 0$.

Dann gilt $|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{E}$.

Folgerung: $|f'(0)| = \lim\limits_{z \to 0} \left| \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} \right| = \lim\limits_{z \to 0} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$.

Beweis: $f \in \mathcal{O}(\mathbb{E}) \Rightarrow f$ hat konv. Taylorreihe

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Kv.-Radius ≥ 1

$f(0) = 0 \Rightarrow f(z) = z \cdot g(z), \quad g \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$

Sei $z \in \partial B_r(0), 0 < r < 1$

$\Rightarrow |g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r}$

Max.-Prinzip $\Rightarrow$ $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ f.a. $z \in \overline{B_r(0)}$, $0<r<1$

$\lim_{r \uparrow 1} \Rightarrow |g(z)| \leq 1$ f.a. $z \in \mathbb{E}$

$\Rightarrow |f(z)| \leq |z|$ "

$\square$

(II.4.7.3) Korollar: Sei $\phi: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph, bijektiv und ϕ^{-1} holomorph mit $\phi(0)=0$.

Dann ex. $\lambda \in S^1 = \partial\mathbb{E}$ mit

$\phi(z) = \lambda z \;\forall z \in \mathbb{E}$, d.h. ϕ ist eine Rotation.

Beweis: Schwarz'sches Lemma $\Rightarrow$ $|\phi(z)| \leq |z| \;\forall z \in \mathbb{E}$

ϕ^{-1} holomorph $\Rightarrow$ $|\phi(z)| \geq |z| \;\forall z \in \mathbb{E}$

$\Rightarrow |\phi(z)| = |z|$ f.a. $z \in \mathbb{C}$.

Sei $g(z) = \begin{cases} \frac{\phi(z)}{z}, & z \neq 0 \\ \phi'(0), & z=0 \end{cases}$ ist holomorph auf $\mathbb{E}$

mit $|g| = 1$

Gebietstreue $\Rightarrow g = \text{const} \Rightarrow \phi(z) = \lambda z$ f.a. $z \in \mathbb{E}$
f.e. $\lambda \in S^1$

$\square$

II.4.7.3 **Def:**

Es seien $G, G' \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $\phi \in \mathcal{O}(G)$ mit $\phi : G \to G'$ bijektiv und $\phi^{-1} \in \mathcal{O}(G')$.

Dann heißt ϕ eine biholomorphe Abbildung und G und G' heißt biholomorph äquivalent.

II.4.7.4 **Satz:** Es sei $a \in \mathbb{E}$ und

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}.$$

Dann gilt $\varphi_a(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$ und φ_a ist eine biholomorphe Selbstabb. von $\mathbb{E}$

mit:
- $\varphi_a(0) = a$
- $\varphi_a(a) = 0$
- $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$

Beweis: ZZ. ist $|\varphi_a(z)| < 1 \ \forall z \in \mathbb{E}$ und $\varphi_a \circ \varphi_a = \mathrm{id}$

$$\varphi_a(\varphi_a(z)) = \frac{\frac{z-a}{\bar a z-1} - a}{\bar a \frac{z-a}{\bar a z-1} - 1}$$

$$= \frac{z-a-a(\bar a z-1)}{\bar a(z-a)-(\bar a z-1)} = \frac{z-a\bar a z}{-\bar a a+1} = z,$$

$$|\varphi_a(z)| < 1 \iff |z-a| < |\bar a z-1|$$

$$\iff (z-a)(\bar z-\bar a) < (\bar a z-1)(a\bar z-1)$$

$$\iff z\bar z - \bar a z - a\bar z + a\bar a < a\bar a z\bar z - a\bar z - \bar a z + 1$$

$$\iff z\bar z(1-a\bar a) < 1-a\bar a \iff z \in \mathbb{E},$$

da $a \in \mathbb{E}$. □

II.4.25 **Theorem** Die (biholomorphen) Automorphismen von $\mathbb{E}$ sind gegeben durch

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{E}) = \left\{ \varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E} \;\middle|\; \varphi(z) = \lambda \cdot \frac{z-a}{\bar a z-1},\ \lambda \in S^1,\ a \in \mathbb{E} \right\}$$

Wir haben eine Bijektion $\mathrm{Aut}(\mathbb{E}) \leftrightarrow S^1 \times \mathbb{E}$

Bew.: Sei $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ und setze $a = \phi^{-1}(0)$

$\Rightarrow \psi = \varphi_a \circ \phi^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ mit $\psi(0) = 0$

Schwarz'sches Lemma $\Rightarrow \psi(z) = \lambda^{-1} \cdot z$ für ein $\lambda \in S^1$

$\Rightarrow \phi(z) = \lambda \cdot \varphi_a(z)$ □

§5. Globaler Cauchy-Integralsatz

<u>Wdh.:</u> Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen

$$C_1(U) = \left\{ \sum n_j \cdot \gamma_j \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma_j \text{ Integrationsweg in } U, \\ \text{nur endlich viele } n_j \neq 0 \\ n_j \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

= freie abelsche Gruppe der <u>1-Ketten</u> in U.

(5.1) <u>Def.</u> $C_0(U) := \left\{ \sum_{p \in U} n_p \cdot p \;\middle|\; n_p \in \mathbb{Z}, \text{ nur endlich viele } n_p \neq 0 \right\}$

= freie ab. Gruppe der <u>0-Ketten</u> in U.

Definiere Gruppenhomom.

$$\partial : C_1(U) \to C_0(U)$$

durch $\mathbb{Z}$-lineare Fortsetzung von

$$\partial \gamma = \gamma(b) - \gamma(a), \quad \text{für } \gamma : [a,b] \to U \text{ Int.-Weg.}$$

<u>Also:</u> γ geschlossen $\Leftrightarrow$ $\partial \gamma = 0$

$\sigma = \sum_\gamma n_\gamma \gamma \in C_1(U)$

heißt <u>1-Zykel</u> $:\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \partial\sigma = 0$.

$Z_1(U) := \ker(\partial : C_1(U) \to C_0(U))$

<u>Bsp.:</u> $\triangleright$ $\forall \gamma$ Σ-Weg: $\gamma + \gamma^{(-1)} \in Z_1(U)$

$\triangleright$ $\gamma_1 \# \gamma_2 \# \dots \# \gamma_n$ geschlossen $\Rightarrow \gamma_1 + \dots + \gamma_n \in Z_1(U)$

(5.2) <u>Lemma</u> Sei G Gebiet und $f \in C^0(G, \mathbb{C})$.

Dann besitzt f eine <u>globale</u> Stammfunktion

$\Leftrightarrow \int_\sigma f\,dz = 0$ f.a. $\sigma \in Z_1(U)$.

<u>Bew.:</u> <u>„$\Rightarrow$"</u>: klar nach Hauptsatz Diff.-Int.

<u>„$\Leftarrow$"</u>: aus II.1.7. $\square$

(5.3) <u>Def.</u> Sei $\Gamma \in Z_1(U)$, $\Gamma = \sum n_\gamma \cdot \gamma$,

$\operatorname{sp} \Gamma := \bigcup_{n_\gamma \neq 0} \operatorname{sp} \gamma \subset \mathbb{C}$ <u>kompakt</u>!

Dann def. die Umlaufzahl von Γ bzgl. $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{sp} \Gamma$

durch $$\boxed{n(\Gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}}$$

Es gilt: ▷ $\forall\ z \in \mathbb{C} \setminus (\operatorname{sp}\Gamma_1 \cup \operatorname{sp}\Gamma_2)$

für $\Gamma_1, \Gamma_2 \in Z_1(U)$:

$$n(\Gamma_1 + \Gamma_2, z) = n(\Gamma_1, z) + n(\Gamma_2, z)$$

▷ $\forall\ z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{sp}\Gamma$

$$n(-\Gamma, z) = -n(\Gamma, z).$$

▷ Für alle $\Gamma \in Z_1(U)$ ex.

geschlossene Integrationswege $\gamma_1, \dots, \gamma_{\tilde{r}}$

s.d. $\bigcup_{i=1}^{\tilde{r}} \operatorname{sp}\gamma_i = \operatorname{sp}\Gamma$

und $n(\Gamma, z) = \sum_{i=1}^{\tilde{r}} n(\gamma_i, z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{sp}\gamma_i$.

Bew.: Übung.

(5.4) Satz: $\forall\ \Gamma \in Z_1(U)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{sp}\Gamma$ gilt

$$n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}.$$

Bew.: Nach obiger Bemerkung können wir OBdA annehmen, daß $\Gamma = \gamma$ geschlossener Weg.

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, OBdA stetig diff'bar.

Sei $h(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} ds$,

also $n(\Gamma, z) = h(1)$.

Setze $g(t) := e^{-2\pi i\, h(t)} \cdot (\gamma(t) - z)$.

$\Rightarrow g'(t) = -2\pi i\, h'(t) \cdot g(t) + \gamma' \cdot \frac{g(t)}{\gamma(t)-z}$

$= g(t) \cdot (-2\pi i) \cdot \left(h' - \frac{1}{2\pi i} \frac{\gamma'}{\gamma - z} \right) = 0$ nach Def. von h

$\Rightarrow g(t) = \text{const}$, $\underbrace{g(0)}_{\gamma(0)-z} = \underbrace{g(1)}_{e^{-2\pi i h(1)}(\gamma(1)-z)}$

$\gamma(0) = \gamma(1) \Rightarrow e^{2\pi i h(1)} = 1 \iff h(1) \in \mathbb{Z}$. $\square$

Betrachte $\Gamma \subset Z_1(\mathbb{C})$ und die kompakte Menge $sp\,\Gamma \subset \mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ ex. $R > 0$ s.d. $sp\,\Gamma \subset \overline{B_R(0)}$

$\Rightarrow \mathbb{C} \setminus sp\,\Gamma$ besteht aus endlich vielen Wegekomponenten,

von denen genau eine $\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)}$ enthält.

Also genau eine Wegkomp. von $\mathbb{C} \setminus sp\,\Gamma$ ist unbeschränkt

BRUNNEN

Für jede Wegekomponente U von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{sp}\Gamma$ gilt:

$$n(\Gamma, \cdot) : U \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

ist stetig und wegen $n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$ lokal-konstant.

(5.5) Lemma: $n(\Gamma, \cdot) : \mathbb{C} \setminus \operatorname{sp}\Gamma \to \mathbb{Z}$

ist konstant auf jeder Wegekomponente

und $= 0$ auf der 1-digen unbeschränkten Komponente

Bew.: z.z. $\lim_{n \to \infty} n(\Gamma, z_n) = 0$ für $|z_n| \to \infty$

$$|n(\Gamma, z_n)| \leq \sum_{i=1}^{k} |m_i| \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_i} \frac{d\zeta}{\zeta - z_n} \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} \frac{|m_i|}{2\pi} L(\gamma_i) \cdot \max_{\zeta \in \operatorname{sp}\gamma_i} \frac{1}{|\zeta - z_n|}$$

$$\leq \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \frac{1}{\underbrace{\operatorname{dist}(\operatorname{sp}\gamma_i, z_n)}_{\to \infty}} \to 0.$$

$\square$

(5.6) Def.: Sei $U \subset \mathbb{C}$ und $\Gamma \in Z_1(U)$.

Γ heißt nullhomolog in U

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} n(\Gamma, z) = 0$ f.a. $z \in \mathbb{C} \setminus U$.

$\Gamma_1, \Gamma_2 \in Z_1(U)$ heißen homolog in U $\Leftrightarrow$ $\Gamma_1 - \Gamma_2$ nullhomolog in U.

$$B_1(U) = \{\Gamma \in Z_1(U) \mid \Gamma \text{ nullhomolog in } U\}$$

ist eine Untergruppe von $Z_1(U)$.

$$H_1(U) := Z_1(U) / B_1(U).$$

Bsp: (a) $H_1(B_r(0)) \cong \{0\}$

Bew: z.B. Jedes $\Gamma \in Z_1(B_r(0))$ ist nullhomolog

OBdA $\Gamma = \gamma$ geschl. Integrationsweg in $B_r(0)$

folgt direkt aus Lemma 5.5.

(b) $H_1(B_{r+\varepsilon}(0) \setminus B_r(0)) \cong \mathbb{Z}$

Bew: Def. $\Phi : \mathbb{Z} \to H_1(U)$

durch $\Phi(k) = [\gamma_k]$,

mit $\gamma_k(t) = (r+\frac{\varepsilon}{2}) \cdot e^{2\pi i k t}$, $0 \le t \le 1$.

Offenbar ist Φ surjektiv und injektiv.

mit $\Phi^{-1}([\Gamma]) = n(\Gamma, 0)$

(c) Übungsaufgabe $H_1(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}) \cong \mathbb{Z}^k$

falls $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$

(5.7) **Satz** (Allgemeine Cauchy-Integralformel)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$ und $\Gamma \in Z_1(U)$

Dann gilt: Wenn Γ null-homolog in U ist, so gilt

(a) $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$

(b) $\forall z \in U \setminus sp\,\Gamma$, $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{n(\Gamma, z) \cdot f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi}$$

Beweis: (1) Es genügt zu zeigen, daß

$$\boxed{n(\Gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \text{f.a. } z \in U \setminus sp\,\Gamma} \quad (*)$$

Daraus folgt (b) durch k-faches Ableiten nach z.

Sei außerdem $F(z) = f(z) \cdot (z - z_0)$ für ein $z_0 \in U \setminus sp\,\Gamma$

Dann gilt: $F(z_0) = 0 \Rightarrow$

$$0 = n(\Gamma, z_0) \cdot F(z_0) \underset{(b)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) dz \Rightarrow (a).$$

(2) Haben $n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\xi - z} \, d\xi$ f.a. $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{sp} \Gamma$

Also $\forall z \in U \setminus \operatorname{sp} \Gamma$ gilt

$$n(\Gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

$$\Leftrightarrow \int_\Gamma \frac{f(z)}{\xi - z} \, d\xi = \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

$$\Leftrightarrow \int_\Gamma \frac{f(z) - f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = 0.$$

Definiere $g(\xi, z) := \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}, & \xi, z \in U, \ \xi \neq z \\ f'(z), & \xi = z \in U. \end{cases}$

Sei $\xi \in B_\delta(z) \subset U$

$$\Rightarrow f(\xi) = f(z + (\xi - z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} (\xi - z)^n$$

$$= f(z) + f'(z)(\xi - z) + h(\xi, z) \cdot (\xi - z)^2$$

$$\Rightarrow g(\xi, z) = f'(z) + h(\xi, z) \cdot (\xi - z)$$

$\nwarrow$ beschränkt für $|\xi - z| < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ g stetig.

Sei $h: U \to \mathbb{C}$

$$h(z) := \int_\Gamma g(\xi, z) d\xi$$

Also (*) $\Leftrightarrow$ $h \equiv 0$

Sei $\Delta \subset U$ Simplex und γ eine positive Parametrisierung von $\partial\Delta$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Delta} h(z) dz = \int_{\gamma} \int_\Gamma g(\xi, z)\, d\xi\, dz$$

$$\underset{\substack{\text{Fubini,}\\ \text{da } g \text{ stetig}}}{=} \int_\Gamma \int_\gamma g(\xi, z) dz\, d\xi$$

Aber $z \mapsto g(\xi, z)$ holomorph in $U \setminus \{\xi\}$ und stetig in ξ

4.1.14 $\Rightarrow$ $\int_\gamma g(\xi, z) dz = 0$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Delta} h(z) dz = 0 \quad \forall \Delta \subset U \Rightarrow h \in \mathcal{O}(U).$$

③ Sei $U_0 := \{ z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}\Gamma \mid n(\Gamma, z) = 0 \}$

Also: U_0 ist eine Vereinigung von Wegkomponenten darunter auch die Unbeschränkte.

Sei $h_0 : U_0 \to \mathbb{C}$, $h_0(z) = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

also $h_0 \in \mathcal{O}(U_0)$.

$z \in U_0 \Rightarrow n(\Gamma, z) = 0 \Rightarrow$

$$0 = n(\Gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

Also: $\forall z \in U_0 \cap U : h(z) = \int_\Gamma g(\zeta, z) d\zeta = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = h_0(z)$.

Da nach Voraussetzung Γ nullhomolog in $U \Rightarrow \mathbb{C} \setminus U \subset U_0$

$\Rightarrow U \cup U_0 = \mathbb{C}$

Also ist $\hat{h} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\hat{h}(z) = \begin{cases} h(z), & z \in U \\ h_0(z), & z \in U_0 \end{cases}$

wohldef., und $\hat{h} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

Sei $z \in U_0 \Rightarrow |\hat{h}(z)| = |h_0(z)| \leq \underbrace{(\text{const})}_{\substack{\text{aus} \\ \text{Länge der} \\ \text{Teilwandlinien} \\ \text{von } \Gamma}} \cdot \frac{\max_{\operatorname{Sp}\Gamma} |f|}{\operatorname{dist}(z, \operatorname{Sp}\Gamma)}$

Jede Folge $(z_k) \subset \mathbb{C}$ mit $|z_k| \to \infty$

liegt ab einem $k \geq k_0$ ganz in U_0

Also $\lim_{k \to \infty} |\hat{h}(z_k)| = 0$

$\Rightarrow$ $\hat{h}$ ist beschränkte ganze Fkt $\Rightarrow$

Satz v. Liouville $\Rightarrow$ $\hat{h} = \text{const} = 0$ $\Rightarrow$ $h = 0 \Rightarrow (*)$

$\boxtimes$

III. Singularitäten und Meromorphe Funktionen

§.1 Laurentreihen

III.1.1 **Def:** Seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq \infty$

dann heißt

$$A_{r,R}(z_0) = B_R(z_0) \setminus \left(\overline{B_r(z_0)} \cup \{z_0\}\right)$$
$$= \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$$

ein Kreisringgebiet

Bsp: Betrachte $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ auf $A_{0,1}(0) = B_1(0) \setminus \{0\}$

$$\leadsto \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$
$$= -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \ldots$$

III.1.2 **Satz** Sei $f \in \mathcal{O}(A_{r,R}(z_0))$

Dann ex. 1-dtge holomorphe Funktionen

$$f_+ \in \mathcal{O}(B_R(z_0)), \quad f_- \in \mathcal{O}\big(\mathbb{C} \setminus \overline{B_r(z_0)} \cup \{z_0\}\big)$$

mit $f = f_+ + f_-$ und $\lim_{z \to \infty} |f_-(z)| = 0$.

f_- heißt der Hauptteil von f
und f_+ der Nebenteil von f.

Beweis OBdA $z_0 = 0$. Sei $r < \rho < R$.

Setze $g_{+,\rho} \in \mathcal{O}(B_\rho(0))$ mit

$$g_{+,\rho}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\rho(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Cauchy-Integralformel $\Rightarrow$ $\forall r < \rho < \rho' < R$: $g_{+,\rho} = g_{+,\rho'}|_{B_\rho(0)}$

Also definiere $f_+(z) = g_{+,\rho}(z)$ für ein beliebiges $|z| < \rho < R$ mit $\rho > r$.

$\Rightarrow f_+ \in \mathcal{O}(B_R(0))$ wohldef.

Sei nun $z \in \mathbb{C} \setminus (\overline{B_r(z_0)} \cup \{z_0\})$.

Wähle ein $\sigma \in (r, \min(|z|, R))$

und definiere $f_-(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\sigma(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$.

Beh: $f_-(z)$ hängt nicht von Wahl von σ ab.

Bew: Variation von σ ändert Weg nur innerhalb des Holomorphie-Bereichs von $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ ▫

Sei nun $z \in A_{r,R}(0)$.

Wähle ρ, σ mit $r < \sigma < |z| < \rho < R$

$\Rightarrow \Gamma = \partial B_\rho(0) - \partial B_\sigma(0) \in Z_1(A_{r,R}(0))$

einfach und positiv durchlaufen

ist null-homolog in $A_{r,R}(0)$ und $n(\Gamma, z) = 1$

II.5.7 (Allg. C.I.) $\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = f_+(z) + f_-(z)$.

Außerdem gilt: $\lim_{z \to \infty} |f_-(z)| \le \sigma \cdot \max_{\partial B_\sigma(0)} |f| \cdot \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial B_\sigma(0))} \to 0$

Sei $f = g_+ + g_-$ und $g_+ \in \mathcal{O}(B_R(0))$
$g_- \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \overline{B_r(0)} \cup \{0\})$
und $\lim_{|z| \to \infty} |g_-(z)| = 0$

$\Rightarrow f_+ - g_+ = g_- - f_-$ auf $A_{r,R}(0)$

$\Rightarrow h(z) := \begin{cases} f_+(z) - g_+(z), & |z| < R \\ g_-(z) - f_-(z), & |z| > r \end{cases}$

definiert eine ganze Funktion $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

$\lim_{|z| \to \infty} |h(z)| = 0 \underset{\text{Liouville}}{\Rightarrow} h = 0 \Rightarrow f_+ = g_+$ und $f_- = g_-$

$\square$