Beweis v. II 1.7:

Sei $z_0 \in G$ fest.

G Gebiet $\Rightarrow$ G ist wegzushgd.

$\Rightarrow \forall\, z \in G$ ex. $\mathcal{C}^1$-Weg $\gamma_z : [0,1] \to G$ von z_0 nach z.

Definiere $F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta$, also $F(z_0) = 0$.

Sei $\tilde{\gamma}_z$ ein anderer Weg von z_0 nach z

$\Rightarrow$ $\gamma_z \# \tilde{\gamma}_z^{-1}$ geschlossen

$\Rightarrow \int_{\gamma_z \# \tilde{\gamma}_z^{-1}} f(\zeta)\, d\zeta = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\tilde{\gamma}_z} f(\zeta)\, d\zeta$

$\Rightarrow F(z)$ wohldef. f.a. $z \in G$.

Betrachte nun eine Umgebung $B_r(z_0) \subset G$

und Wege $\gamma_z(t) = z_0 + t(z - z_0)$ in G f.a. $z \in B_r(z_0)$.

$$\Rightarrow F(z) - F(z_0) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta = \int_0^1 f(z_0 + t(z-z_0)) \cdot (z - z_0)\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\, dt \quad \forall z \neq z_0$$

f stetig in $z_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ s.d.

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Für $0 < \delta < r$ und $z \in B_\delta(z_0)$

$$\Rightarrow \left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| = \left| \int_0^1 \left[f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0) \right] dt \right|$$

$$\leq \varepsilon \text{ f.a. } z \in B_\delta(z_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = f(z_0)$$

$$\Rightarrow F \in \mathcal{O}(G), \; F' = f. \qquad \square$$

II.1.8 *Def.* Seien ~~[illegible]~~ $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

dann def.

$$\Delta(z_0, z_1, z_2) = \left\{ z_0 + s \cdot (z_1 - z_0) + t(z_2 - z_0) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \leq s, t \\ s + t \leq 1 \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow \Delta(z_0, z_1, z_2)$ ist ein abgeschlossener 2-Simplex

Der Rand ist

$$\partial \Delta(z_0, z_1, z_2) =: \langle z_0, z_1, z_2 \rangle \in C_1(\mathbb{C})$$

$$\langle z_0, z_1, z_2 \rangle (t) = \begin{cases} (1-t) z_0 + t z_1, & 0 \leq t \leq 1 \\ (2-t) z_1 + (t-1) z_2, & 1 \leq t \leq 2 \\ (3-t) z_2 + (t-2) z_0, & 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

II.1.9 **Satz:** Sei G ein sternförmiges Gebiet und $f \in C^0(G, \mathbb{C})$.
Dann hat f eine Stammfunktion auf G

$$\Leftrightarrow \oint_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0 \quad \forall \ \Delta(z_1, z_2, z_3) \subset G.$$

Beweis: Übung.

II.1.10 **Beispiel:** $f(z) = \frac{1}{z} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
besitzt keine Stammfunktion

Bew:
$$\oint_{\partial B_r(0)} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\varphi}}\, r i e^{i\varphi}\, d\varphi$$

$$= 2\pi i \neq 0.$$

Aber $f(z) = \frac{1}{z}$ besitzt eine Stammfunktion auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$

II.1.11 Satz (Fundamentallemma der Funktionentheorie)

Seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$ und $z_1, z_2, z_3 \in D$ mit $\Delta(z_1, z_2, z_3) \subset D$.

Dann gilt $\displaystyle\oint_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(z)\, dz = 0$.

Beweis: $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle = \partial \Delta(z_1, z_2, z_3)$ ist ein einfach geschlossener Weg mit $\Delta(z_1, z_2, z_3) \subset D$.

Satz von Stokes $\Rightarrow \displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = \int_{\Delta} d(f(z)\, dz)$

NR: $$d(f(z)\, dz) \overset{I.2.12}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}\right) \wedge dz$$
$$= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz, \text{ da } dz \wedge dz = 0$$
$$= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (2i\, dx \wedge dy) = 0, \text{ da } f \text{ holomorph}$$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

II.1.12 Satz (Cauchy-Integralsatz für sternförmige Gebiete)

Seien $f \in \mathcal{O}(D)$, D sternförmiges Gebiet und γ geschlossener $\mathcal{I}$.-Weg in D.

Dann gilt $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$

und äquivalent: f besitzt eine Stammfunktion in D.

Beweis: Sei z_* Sternmittelpunkt von D.

Sei $z_0 \in D$ beliebig und $\overline{z_* z_0}(t) = z_* + t(z_0 - z_*)$

Definiere $F(z_0) = \int_{\overline{z_* z_0}} f(\zeta)\,d\zeta$.

Sei $\delta > 0$ so daß $B_\delta(z_0) \subset D$.

$\Rightarrow \Delta(z_*, z_0, z) \subset D$

II.1.11 $\Rightarrow \int_{\langle z_*, z_0, z\rangle} f(\zeta)\,d\zeta = 0$

$\Rightarrow F(z) - F(z_0) = \int_{\overline{z_0 z}} f(\zeta)\,d\zeta$

$\Rightarrow$ F diff'bar in D mit $F' = f$ $\square$

analog II.1.7

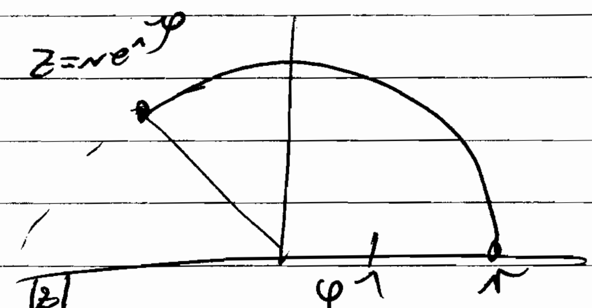
II.1.13 Beispiel

Betrachte $f(z) = \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- =: D$

D ist sternförmig, z.B. $z_* = 1$

Also hat f eine Stammfunktion in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$

Sei $L \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$ mit $L'(z) = \frac{1}{z}$



$$L(z) = \int_1^{|z|} \frac{1}{t}\,dt + \int_0^{\varphi} \frac{1}{re^{it}}\, i r e^{it}\,dt$$

$$= \log|z| + i\varphi =: \log|z| + i \operatorname{Arg} z =: \operatorname{Log} z$$

= komplexer Logarithmus
oder Zweig des Logarithmus
auf negativ geschlitzter Ebene.

$\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi)$.

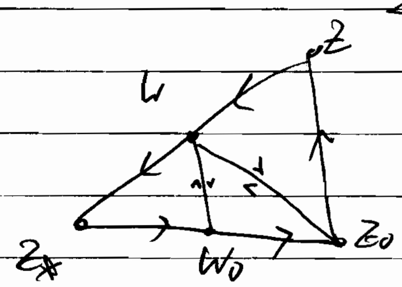
II 1.14 Satz (Verschärfung des Cauchy-Integralsatzes)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet mit Mittelpunkt z_*,
$f \in C^0(D, \mathbb{C}) \cap \mathcal{O}(D \setminus \{z_*\})$.
Dann besitzt f eine Stammfunktion.

Beweis: Sei $\Delta(z_1, z_2, z_3) \subset D$

$\Rightarrow$ Δ kann in endlich viele Δ zerlegt werden, von denen jedes entweder in $D \setminus \{z_*\}$ liegt, oder von der Form $\Delta(z_*, z_0, z)$ ist mit $z \in B_\delta(z_0) \subset D \setminus \{z_*\}$.

Also bleibt zu zeigen: $\oint_{\langle z_*, z_0, z \rangle} f(\zeta)\, d\zeta = 0 \quad \forall\, |z - z_0| < \delta$.



Sei $w = \varepsilon z + (1-\varepsilon) z_*$
$w_0 = \varepsilon z_0 + (1-\varepsilon) z_*$
$0 < \varepsilon < 1$.

$$\Rightarrow \oint_{\langle z_*, z_0, z\rangle} f\,dz = \oint_{\langle z_*, w_0, w\rangle} f + \int_{\langle w, w_0, z_0\rangle} f + \int_{\langle w, z_0, z\rangle} f$$

$\oint_{\langle z_*, w_0, w\rangle} f \xrightarrow{\text{für } \varepsilon \to 0} 0$ da f stetig in z_*.

$\int_{\langle w, w_0, z_0\rangle} f = 0$, $\int_{\langle w, z_0, z\rangle} f = 0$ da $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_*\})$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

§2 Cauchy-Integralformel

(II.2.1) Satz: Sei γ ein Integrationsweg in $\mathbb{C}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ offen und

$$f : sp\,\gamma \times \mathcal{U} \to \mathbb{C}$$
$$(\zeta, z) \mapsto f(\zeta, z)$$

stetig. Dann gilt:

a) $F(z) := \int_\gamma f(\zeta, z)\, d\zeta$, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ ist stetig

b) Falls außerdem

$\forall \zeta \in sp\,\gamma :$ $\mathcal{U} \ni z \mapsto f(\zeta, z) \in \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-diff'bar

und $\frac{\partial f}{\partial z}$ stetig auf $sp\,\gamma \times \mathcal{U}$,

so ist $F \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ und

$$F'(z) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta, z)\, d\zeta.$$

BRUNNEN

(32)

Beweis: Sei $\overline{B_r(z_0)} \subset U$

$\Rightarrow$ $\operatorname{spur}\gamma \times \overline{B_r(z_0)}$ kp.

$\Rightarrow$ f ist gleichmäßig stetig auf $\operatorname{spur}\gamma \times \overline{B_r(z_0)}$

Also $|F(z) - F(z_0)| \leq \int_\gamma |f(\zeta,z) - f(\zeta,z_0)|\, d\zeta$

$\leq L(\gamma) \cdot \max\limits_{\zeta \in \operatorname{spur}\gamma} |f(\zeta,z) - f(\zeta,z_0)|$

$< L(\gamma) \cdot \varepsilon$ f.a. $|z-z_0| < \delta = \delta(\varepsilon,\gamma)$.

$\Rightarrow$ a)

b) MWS $\Rightarrow$ $\forall \zeta \in \operatorname{spur}\gamma\ \exists t_\zeta \in [0,1]$ s.d.

$$\frac{f(\zeta,z) - f(\zeta,z_0)}{z-z_0} = \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta, z_0 + t_\zeta \cdot (z-z_0)),$$

falls $z \neq z_0$.

$\frac{\partial f}{\partial z}$ gleichm. stetig auf $\operatorname{spur}\gamma \times \overline{B_{r_0}(z_0)}$

$\Rightarrow$ ex. $\delta = \delta(\varepsilon,\gamma)$ zu gegebenem $\varepsilon > 0$, s.d.

$\left|\frac{\partial f}{\partial z}(\zeta, z_0 + t_\zeta \cdot (z-z_0)) - \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta, z_0)\right| < \varepsilon$ f.a. $\zeta \in \operatorname{spur}\gamma$, $z \in B_\delta(z_0)$

$\Rightarrow$ $\left|\frac{F(z) - F(z_0)}{z-z_0} - \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta,z_0)\, d\zeta\right| \leq L(\gamma) \cdot \varepsilon$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

II.2.2 Theorem (Cauchy-Integralformel)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f \in \mathcal{O}(G)$ und $\overline{B_r(z_0)} \subset G$. Dann gilt

$$\forall z \in B_r(z_0): \quad \boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta}$$

Anwendung: Betrachte f, G wie vorher und $g(\zeta, z) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ auf $\underset{\zeta}{\partial B_r(z_0)} \times \underset{z}{B_r(z_0)}$

$\Rightarrow g$ stetig, $\frac{\partial g}{\partial z}(\zeta, z) = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$ stetig

$\Rightarrow$ II.2.1 anwendbar $\Rightarrow f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta$

Iteration liefert dann:

II.2.3 Korollar: f, G wie oben $\Rightarrow f$ ist beliebig oft $\mathbb{C}$-diff'bar in G

und
$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta}$$

f.a. $0 \le |z - z_0| < r$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset G$.

(34)

Also $\boxed{\begin{array}{l} f \text{ 1-mal } \mathbb{C}\text{-diff'bar in } G \\ \Rightarrow f\ \infty\text{-oft } \mathbb{C}\text{-diff'bar in } G \end{array}}$!

Beweis II.22: Sei $\overline{B_r(z_0)} \subset G$ und $\delta > 0$ klein genug, so daß $U = B_{r+\delta}(z_0) \subset G$

Sei $z \in U$ und definiere $g : U \to \mathbb{C}$ durch

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{falls } \zeta \neq z \\ f'(\zeta), & \text{falls } \zeta = z \end{cases}$$

$f \in \mathcal{O}(G) \Rightarrow g \in C^0(U, \mathbb{C})$ und
$g \in \mathcal{O}(U \setminus \{z\})$

Also II.14 (starker Cauchy-Integralsatz)

$\Rightarrow g$ besitzt Stammfunktion, also

$$0 = \oint_{\partial B_r(z_0)} g(\zeta)\,d\zeta = \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - f(z) \underbrace{\oint \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{= 2\pi i}$$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

II.2.4) Theorem (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $z_0 \in G$

und $f \in \mathcal{O}(G \setminus \{z_0\})$ mit $f|_{B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}}$ beschränkt

f.e. $\varepsilon > 0$.

Dann ex. $\hat{f} \in \mathcal{O}(G)$ mit $\hat{f}|_{G \setminus \{z_0\}} = f$.

$\hat{f}$ heißt die holomorphe Fortsetzung von f nach z_0

z_0 heißt hebbare Singularität von f

Bew.: Betrachte $F(z) := \begin{cases} (z-z_0) \cdot f(z) & , z \in G \setminus \{z_0\} \\ 0 & , z = z_0 \end{cases}$

$\Rightarrow F \in \mathcal{O}(G \setminus \{z_0\}) \cap C^0(G, \mathbb{C})$.

starker Cauchy-Integralsatz (II.1.14)

$\Rightarrow$ F besitzt lokale Stammfunktion bei z_0

$\Rightarrow F \in \mathcal{O}(G)$.

$\Rightarrow F(z) = F(z_0) + g(z)(z-z_0)$, mit g stetig in z_0

$\Rightarrow g(z) = f(z)$ ist stetig in z_0 $\overset{\text{II.1.14}}{\Longrightarrow} f \in \mathcal{O}(G)$. $\square$

II.2.5 Def. + Satz (Satz von Liouville)

Eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ heißt ganze Funktion.

Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Bew.: z.z. $f'(z) = 0 \; \forall z \in \mathbb{C}$.

Cauchy-Integralformel

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, d\zeta \quad \text{f.a. } r > 0$$

$$\Rightarrow |f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \max_{|\zeta - z| = r} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right|$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \max_{\partial B_r(z)} |f| \leq \frac{M}{r} \quad \text{f.a. } r > 0$$

$$\Rightarrow f' \equiv 0.$$

□

Beispiel: $f(z) = \sin z$ ist eine ganze Funktion

$\Rightarrow f$ ist unbeschränkt auf $\mathbb{C}$

nämlich $f(\underset{z}{iy}) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}$

$= \frac{i}{2} \sinh y$ unbeschränkt.