IV.18 **Lemma** Durch 3 paarweise versch. Punkte z_1, z_2, z_3 läuft ein 1-deutig bestimmter Kreis oder Gerade.

Bew.: Elementargeometrie

IV.19 **Satz:** Ein gegebenes $z \in \hat{\mathbb{C}}$ liegt auf der durch z_1, z_2, z_3 bestimmten Kreis/Gerade

$\Leftrightarrow DV(z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Beweis. Sei $T \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$ mit

$T(z_1) = 0, \quad T(z_2) = 1, \quad T(z_3) = \infty$

$\Rightarrow T(\cdot) = DV(\cdot, z_1, z_2, z_3)$.

IV.1.7 $\Rightarrow$ T bildet den Kreis/Gerade K durch z_1, z_2, z_3

auf die Gerade durch $0, 1, \infty$, d.h. $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Also: $z \in K \Leftrightarrow Tz \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
$\Leftrightarrow DV(z, \text{—}) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\square$

IV.1.10 **Satz:** Sei $K \subset \hat{\mathbb{C}}$ Kreis oder eine durch ∞ kompaktifizierte Gerade und $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ sei ein Gebiet mit $\partial G = K$. Dann ex. $T \in \operatorname{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ mit $T(G) = \mathbb{H}$.

Alle solche Gebiete sind konform äquivalent.

Bew.: K zerlegt $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ in genau 2 Gebiete

$$\hat{\mathbb{C}} = G_1 \cup K \cup G_2.$$

Sei $T \in \operatorname{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ mit $TK = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow T(G_1) = \mathbb{H}$ und $T(G_2) = \overline{\mathbb{H}}$ ← lgx. Komp.

oder umgekehrt.

IV.1.11 **Bsp + Def:**

$$T : z \mapsto DV(z, 1, i, -1) = \frac{z-1}{z+1} \Big/ \frac{i-1}{i+1}$$

$$T(S^1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$\rightsquigarrow T : \mathbb{E} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$$

Die Umkehrabb.

$\mathbb{H} \to \mathbb{E}$, $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ heißt

Cayley-Abb.

BRUNNEN

IV 1.12 **Satz:**

~~Für~~ $PSL(2,\mathbb{R}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \;\middle|\; \begin{matrix} a,b,c,d \in \mathbb{R}, \\ ad-bc=1 \end{matrix} \right\} \Big/ \pm 1$

die reelle Möbiusgruppe

Dann ex. ein Gruppeniso.

$$PSL(2,\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$$

und ein Homöomorphismus

$$\Psi : \mathrm{Aut}(\mathbb{E}) \xrightarrow{\approx} FS^1 = \left\{ (z_1,z_2,z_3) \in (S^1)^3 \;\middle|\; \begin{matrix} \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 \\ \text{oder zyklische Vertauschungen} \end{matrix} \right\}$$

Beweis: Übung

§.2 Normale Familien holomorpher Funktionen

IV.2.1 **Satz** Für $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{O}(G,\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$

mit:
- ▷ (f_n) lokal gleichm. kvg.
- ▷ $f := \lim f_n \not\equiv \text{const}$
- ▷ ex. $w_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \in G$ mit

$$f(z_0) = w_0, \quad \mathrm{ord}_{z_0}(f - w_0) = k.$$

Dann ex. Umgeb. $V(z_0) \subset G$ und $n_0 \in \mathbb{N}$

s.d.
$$\sum_{\{z' \in V(z_0) \mid f_n(z') = w_0\}} \mathrm{ord}_{z'}(f_n - w_0) = k$$

f.a. $n \geq n_0$.

Bew.: OBdA $w_0 = 0$

Id.-Satz $\Rightarrow$ ex. $\varepsilon > 0$ mit $f^{-1}(0) \cap \overline{B_\varepsilon(z_0)} = \{z_0\}$.

$\Rightarrow \delta = \min\{\, |f(z)| \mid z \in \partial B_\varepsilon(z_0)\} > 0$

Für $n_0 \in \mathbb{N}$ groß genug s.d.

$$|f_n(z) - f(z)| < \delta \quad \text{f.a. } z \in \partial B_\varepsilon(z_0),\ n \geq n_0$$

(wegen lokal gleichm. Kvg.)

Wende Satz von Rouché III.4.9 an auf

$$f_n = f + (f_n - f)$$

$$0 \leq |f_n - f| < |f| \text{ auf } \partial B_\varepsilon(z_0)$$

$$\Rightarrow \sum_{z \in B_\varepsilon(z_0) \cap f_n^{-1}(0)} \operatorname{ord}_z f_n = \sum_{z \in B_\varepsilon(z_0) \cap f^{-1}(0)} \operatorname{ord}_z f = k$$

□

IV.2.2 Korollar: Seien $f_n \to f$ wie in IV.2.1 und f_n injektiv f.ü. $n \geq n_0$, $f \neq$ const. Dann ist auch f injektiv.

Beweis: Seien $z_1 \neq z_2 \in G$ mit $f(z_1) = f(z_2) = w_0$

Finde Umgebungen $V(z_1) \cap V(z_2) = \emptyset$

IV.2.1 $\Rightarrow \# \{ z' \in V(z_i) \mid f_n(z') = w_0 \} \geq 1$ f.ü. $n \geq n_0$

$\Rightarrow f_n$ nicht injektiv. □

Wdh: Satz von Arzela-Ascoli

Sei (X,d) kp. metrischer Raum,

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^0(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ beschränkt und gleichgradig stetig

Dann ex. Teilfolge (n_k) sd.

$f_{n_k} \to f$ glm. kvg.

Analog gilt die Version für lokal beschr. lokal gleichgradig stetige Folgen

IV.23 **Kompaktheits-Lemma**

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(U)$

eine lokal beschränkte Familie holomorpher Fkt.

Dann ist $\mathcal{F}$ lokal gleichgradig stetig.

<u>Beweis</u> Sei $\overline{B} = \overline{B_r(z_0)} \subset U$

und $K \geq \sup_{f \in \mathcal{F}} \max_{\overline{B}} |f|$ (ex. nach Voraus. lokal beschr.)

Sei $X = \overline{B_{\frac{r}{2}}(z_0)}$. Dann gilt f.a. $f \in \mathcal{F}$, $z_1, z_2 \in X$:

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left| \int_{\overline{z_1 z_2}} f'(z)\, dz \right|$$

$$\leq |z_2 - z_1| \cdot \max_{z \in X} |f'(z)|$$

Cauchy-Integralformel: $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$

$$\Rightarrow |f'(z)| \leq r \cdot \frac{K}{(r/2)^2} = \frac{4K}{r} \quad \text{f.a. } z \in \overline{B_{\frac{r}{2}}(z_0)}$$

$$\Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{4K}{r} |z_1 - z_2| \quad \text{f.a. } f \in \mathcal{F}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ lokal gleichgradig stetig. □

IV.24 <u>Satz von Montel</u>: Für $U \subset \mathbb{C}$ offen, $(f_n) \subset \mathcal{O}(U)$:

Falls (f_n) lokal beschränkt

so ex. eine lokal gleichm. konv. Teilfolge

<u>Beweis</u> Kompaktheits-Lemma + Arzela-Ascoli

IV.2.5 **Def.:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen

und $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(U)$.

$\mathcal{F}$ heißt <u>normale Familie</u>

:$\Leftrightarrow$ jede Folge $(f_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$

besitzt eine lokal glm. kvg. Teilfolge

oder eine Teilfolge mit $f_{n_k} \to \infty$ lokal glm.

(d.h. $\frac{1}{f_{n_k}} \to 0$ lokal glm.)

<u>Alex</u> <u>S.v. Montel</u>: $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(U)$ lokal beschränkt $\Rightarrow \mathcal{F}$ normal.

IV.2.6 Satz von Vitali

Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ eine normale Familie, und $X \subset G$ nicht-diskret.

Dann gilt für jede Folge $(f_n) \subset \mathcal{F}$:

Falls $f_n \to g$, $g: X \to \hat{\mathbb{C}}$ punktweise, so konvergiert (f_n) lokal gleichm. auf G (eventuell gegen ∞)

Beweis: Fall 1: $g \not\equiv \infty$

$\mathcal{F}$ normal $\Rightarrow$ (f_n) hat lokal gleichm. konv. TF (f_{n_k})

$f_{n_k} \to f \in \mathcal{O}(G)$,

$f|_X = g$, $f: G \to \hat{\mathbb{C}}$ holom.

Angenommen, nicht die gesamte Folge (f_n) konvergiert gegen f,

$\Rightarrow$ ex. andere TF (f_{m_ℓ}) mit $|f_{m_\ell}(z_\ell) - f(z_\ell)| \geq \varepsilon_0$

für geeignete Punkte $(z_\ell) \subset K$, K kp. in G.

$\mathcal{F}$ normal $\Rightarrow$ ex. TF $(f_{m_{k}}) \to \tilde{f} \in \mathcal{O}(G)$

aber $\tilde{f}|X = f|X$, X nicht-diskret $\Rightarrow f = \tilde{f}$ ~~$\tilde{f} \neq f$~~ Wid.

Also: $f_n \to f$.

Fall 2: $g \equiv \infty$.

Falls (f_n) nicht lokal gleichm. $\to \infty$

$\Rightarrow$ ex. $\varepsilon_0 > 0$, K kp., TF (f_{n_k})

mit $|f_{n_k}(z_k)| < \varepsilon_0$ für eine Pktfolge $(z_k) \subset K$

$\mathcal{F}$ normal $\Rightarrow$ OBdA $f_{n_k} \to f$, $|f| < \varepsilon_0$

aber $f|X \to \infty$ Wid.

$\square$

IV.27 Def.: Ein topologischer Raum X heißt einfach zusammenhängend

$:\Leftrightarrow$ $\forall$ $c: S^1 \to X$ stetig

ex. Homotopie $h: S^1 \times [0,1] \to X$ stetig

mit $h(0,t) = c(t)$ f.a. $t \in S^1$
$h(1,t) = p_0$ " f.e. $p_0 \in X$.

IV.28 Satz: a) $\hat{\mathbb{C}}$ ist 1-zushgd.

b) $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ ist 1-zushgd. Gebiet

$\Leftrightarrow$ $G = \hat{\mathbb{C}}$ oder

ex. $T \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ s.d.
$\infty \notin T(G)$ und
jeder Zykel $\Gamma \in Z_1(T(G))$
ist nullhomolog

o. Bew.

IV.2.9 **Thm** (Riemannscher Abbildungssatz)

Es sei $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein 1-zshgd. Gebiet mit $\#(\hat{\mathbb{C}} \setminus G) \geq 2$.

Dann ex. $f : G \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}$ biholomorph.

Diese Abb. f ist eindeutig unter der Bedingung $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$ f.e. $z_0 \in G \setminus \{\infty\}$

Insbesondere gilt: Jedes 1-zshgde Gebiet $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ ist biholomorph äquivalent zu:

$\hat{\mathbb{C}}$, oder

$\mathbb{C}$, oder

$\mathbb{H} \simeq \mathbb{E}$

Beweis des Riem. Abb.satzes

ⓐ Eindeutigkeit:

Sei $z_0 \in G \setminus \{\infty\}$, $f, g : G \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}$

mit $f(z_0) = g(z_0) = 0$, $f'(z_0), g'(z_0) > 0$.

Sei dann $T = g \circ f^{-1}$, also $T : \mathbb{E} \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}$

$T(0) = 0$

$T'(0) \in \mathbb{R}$, $T'(0) > 0$

Lemma von Schwarz $\Rightarrow$ $T(z) = az$, $|a| = 1$

$a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ $\Rightarrow$ $a = 1$

$\Rightarrow$ $T = id$.

$\Rightarrow$ $f \equiv g$.

ⓑ Existenz:

Schritt 1: Ex. $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $f' \neq 0$ und $f(G) \subset \mathbb{E}$

Vor. $\Rightarrow$ ex. $a, b \in \hat{\mathbb{C}} \setminus G$, $a \neq b$

$\Rightarrow$ ex. $T_1 \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$ mit $T(a) = 0$, $T(b) = \infty$

$\Rightarrow$ $G_1 = T(G) \subset \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

G 1-zshgd. $\Leftrightarrow$ G_1 1-zshgd.

$\Rightarrow$ ex. Zweig von $\sqrt{z}$ auf G_1

Dieser sei $g \in \mathcal{O}(G_1)$.

Sei $\sqrt{g}(G_1) =: G_2$

Dann ist $\sqrt{g}: G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$ biholomorph

denn $\sqrt{g}(z) = \sqrt{g}(z') \Rightarrow \underbrace{\sqrt{g}(z)^2}_{=z} = \underbrace{\sqrt{g}(z')^2}_{=z'} \Rightarrow z = z'$.

Beh. Ex. $z_0 \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B_\varepsilon(z_0)} \subset \mathbb{C} \setminus G_2$

Bew.: Sei $w \in G_2 \Rightarrow w = \sqrt{g}(z)$

$\Rightarrow w^2 = z \in G_1$

Angenommen auch $-w \in G_2$, $-w = \sqrt{g}(z')$

$\Rightarrow z' = (-w)^2 = w^2 = z \Rightarrow w = -w \Rightarrow w = 0$

$\Rightarrow z = 0 \in G_1$ $\lightning$.

Also: $-w \notin G_2$.

Sei $-z_0 \in G_2$ und $\varepsilon > 0$ klein genug s.d.

$\overline{B_\varepsilon(-z_0)} \subset G_2 \Rightarrow \overline{B_\varepsilon(z_0)} \subset \mathbb{C} \setminus G_2$

Sei $T_2 \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ mit $T_2(\partial B_\varepsilon(z_0)) = S^1$

und $|T_2(z_0)| > 1$

$\Rightarrow \overline{T_2(G_2)} \subset \mathbb{E}$.

Also $T_2 \circ \sqrt{g} \circ T_1 : G \to \mathbb{E}$

Sei $z_0 \in G$ gegeben, dann findet wir $S \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$

sd. $f = S \circ T_2 \circ g \circ T_1 : G \to \mathbb{E}$

mit $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$.

<u>Schritt 2:</u> Sei nun $G^* \subset \mathbb{E}$ 1-zushgd.

mit $0 \in G^*$.

Betrachte die Familie

$$\mathcal{F} = \left\{ f : G^* \to \mathbb{E} \;\middle|\; f \text{ holomorph, injektiv, } f(0) = 0, \; f'(0) > 0 \right\}$$

<u>Wissen:</u> $\mathcal{F} \neq \emptyset$, da $f(z) = z \in \mathcal{F}$ nach Schritt 1

Satz von Montel $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ normal,

da $|f(z)| < 1$ f.a. $f \in \mathcal{F}$, $z \in G^*$.

Sei $\alpha := \sup \{ f'(0) \mid f \in \mathcal{F} \} \in (-\infty, +\infty]$

$(\mathrm{id}_{G^*})'(0) = 1 \Rightarrow \alpha \geq 1$.

Sei $(f_n) \subset \mathcal{F}$ mit $f_n'(0) \to \alpha$

$\mathcal{F}$ normal $\Rightarrow$ ex. lokal gleichm. konv. TF

$f_{n_k}'(0) \to f_0'(0) = \alpha < \infty$

$\alpha > 1 \Rightarrow f_0 \neq \text{const}.$

$|f_n| < 1 \Rightarrow |f_0| \leq 1$

Max.-Prinzip $\Rightarrow |f_0| < 1 \Rightarrow f_0(G^*) \subset \mathbb{E}$

IV.2.2 $\Rightarrow$ f_0 injektiv

Also $f_0 \in \mathcal{F}$.

Bleibt zu zeigen $f_0(G^*) = \mathbb{E}$.

IV.2.10 Lemma: Für $G_0 \subset \mathbb{E}$ Gebiet, $G_0 \neq \mathbb{E}$

IV.2.2 $\Rightarrow$ f_0 injektiv

Also $f_0 \in \mathcal{F}$.

Bleibt zu zeigen $f_0(G^*) = \mathbb{E}$.

(IV.2.10) <u>Lemma:</u> Für $G_0 \subset \mathbb{E}$ Gebiet, $G_0 \neq \mathbb{E}$

G_0 1-zushgd., und $0 \in G_0$.

Dann ex. $h \in \mathcal{O}(G_0)$, $h(G_0) \subset \mathbb{E}$,
h injektiv, $h(0) = 0$, $h'(0) > 1$.

<u>Forts. Riem.-Abb.-Satz:</u>

Falls $f_0(G^*) \subsetneq \mathbb{E} \Rightarrow$ finde h wie in Lemma IV.2.10

$\Rightarrow h \circ f_0 \in \mathcal{F}$ und $(h \circ f_0)'(0) = h'(0) \cdot \alpha > \alpha$ Wid.

Also folgt $f_0(G^*) = \mathbb{E}$ □

Beweis Lemma IV.2.10:

Sei $c \in \mathbb{E} \setminus G_0$ und betrachte $T_1 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$

mit $T_1(z) = \frac{z-c}{1-\bar{c}z}$, also $T_1(c) = 0$, $T_1(0) = -c$

Sei $G_1 = T_1(G_0)$, also $0 \notin G_1$, $-c \in G_1$

$\Rightarrow$ ex. Zweig der Wurzelfkt. auf G_1, $g \in \mathcal{O}(G_1)$

$g(z)^2 = z$, g injektiv, $g(G_1) \subseteq \mathbb{E}$

Sei $d = g(-c)$. Zu $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $T_2 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$

mit $T_2(z) = e^{i\lambda} \frac{z-d}{1-\bar{d}z}$, also $T_2(g(-c)) = 0$

Sei $h = T_2 \circ g \circ T_1 : G_0 \to \mathbb{E}$

$\Rightarrow h(0) = 0$.

Wähle $\lambda \in \mathbb{R}$ so, daß $h'(0) > 0$.

Sei $g^*(z) = z^2$, $h^* = T_1^{-1} \circ g^* \circ T_2^{-1} \Rightarrow h^* : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$

mit $h^*|_{h(G_0)} = h^{-1}$, $h^*(0) = 0$,

h^* auf $\mathbb{E}$ nicht bijektiv $\Rightarrow$ h^* keine Drehung

Schwarz-Lemma $\Rightarrow |(h^*)'(0)| < 1$

$\Rightarrow |h'(0)| = \frac{1}{|(h^*)'(0)|} > 1$ //

IV.2.11 **Bsp:**

Sei $G = \{ z \in \mathbb{C} \mid -\alpha < \arg z < \alpha \}$, $\quad 0 < \alpha < \pi$

Betrachte $\quad \mathbb{E} \to \mathbb{H}^+ = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \}$

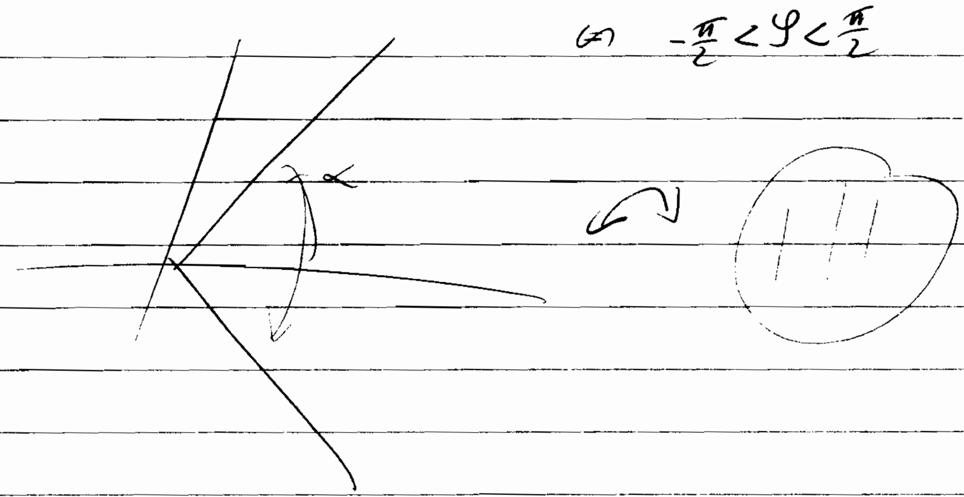
$$z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$$

und $\quad \mathbb{H}^+ \to G$

$$w \mapsto w^{\frac{2\alpha}{\pi}}$$

$$re^{i\varphi} \mapsto r^{\frac{2\alpha}{\pi}} e^{i \frac{2}{\pi}\alpha\varphi}, \qquad -\alpha < \frac{2}{\pi}\alpha\varphi < \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$



Kapitel V: Elliptische Funktionen

§1. Gitter

(V.1.1) Def.: $L \subset \mathbb{C}$ heißt Gitter (engl.: lattice)

$\overset{\text{def.}}{\iff}$ ex $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linear unabh.

(d.h. $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$)

sd. $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$
$= \{k\omega_1 + l\omega_2 \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$

Bem.: L ist freie abelsche Gruppe

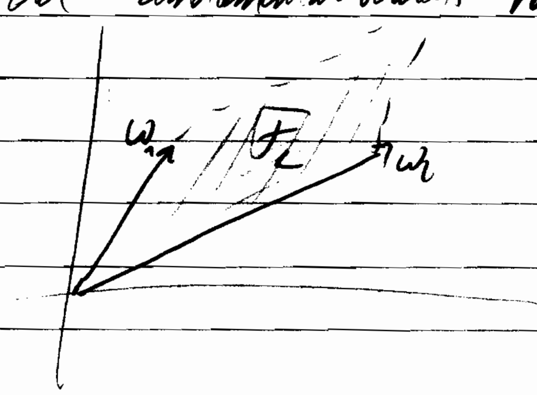
bzgl. $+$ und $\cong \mathbb{Z}^2$

Bew.: $\phi: \mathbb{Z}^2 \to L$
$(k,l) \mapsto k\omega_1 + l\omega_2$ surjektiv nach Def. von L

ϕ injektiv, da ω_1, ω_2 $\mathbb{R}$-lin. unabh.

$F_L = \{s\omega_1 + t\omega_2 \mid 0 \leq s, t \leq 1\}$

heißt der Fundamentalbereich von L



Eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ heißt **elliptische Funktion zum Gitter L**

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ f ist doppelperiodisch bzgl. L,

d.h. $f(z+w) = f(z)$ f.a. $z \in \mathbb{C}, w \in L$.

V.1.2 Satz (1. Liouvillescher Satz)

Jede elliptische Funktion ohne Polstellen ist konstant.

Bew.: $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $f(z+w) = f(z)$ f.a. $z \in \mathbb{C}, w \in L$

$\Rightarrow f(\mathbb{C}) = f(F_L)$ kp.

$\Rightarrow f$ beschränkt und ganz $\overset{\text{S.v.Liouville}}{\Longrightarrow}$ $f = $ const. $\square$

V.1.3 Def.: Sei L Gitter in $\mathbb{C}$.

Def. Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}$

$z \sim z' \Leftrightarrow z' = z + w$ f.e. $w \in L$

also $[z]_L = z + L$

$T_L := \mathbb{C}/L := \{[z]_L \mid z \in \mathbb{C}\}$ heißt der Periodentorus zu L.

Es gilt:

(a) $\mathbb{C}/L$ ist abelsche Gruppe bzgl.

$$[z] + [z'] = [z+z']$$

(b) $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L, \; z \mapsto [z]_L$

induziert eine Topologie auf $\mathbb{C}/L$

durch $U \subset \mathbb{C}/L$ offen $\Leftrightarrow$ $\pi^{-1}(U)$ offen in U

(c) T_L ist diffeomorph zu $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$

durch $\varphi : \mathbb{T}^2 \to T_L$
$(e^{i\alpha}, e^{i\beta}) \mapsto \frac{\alpha}{2\pi} \omega_1 + \frac{\beta}{2\pi} \omega_2$.

(d) f elliptisch zu $L \Rightarrow f : \mathbb{C}/L \to \hat{\mathbb{C}}$ wohldef.

(e) f elliptisch bzgl $L \Rightarrow \operatorname{Res}_z f = \operatorname{Res}_{z+\omega} f$

f.a. $z \in \mathbb{C}, \omega \in L$.

$\Rightarrow \operatorname{Res}_{[z]} f \in \mathbb{C}$
wohldef. f.a. $[z] \in \mathbb{C}/L$.

I.14 Satz (2. Liouvillescher Satz)

f elliptisch bzgl. L $\Rightarrow$ a) f hat nur endlich viele Pole modulo L

und b) $\sum_{[z]\in \mathbb{C}/L} \operatorname{Res}_{[z]} f = 0$.

Bew.: a) genügt z.z. f hat nur endlich viele Pole in F_L.

F_L kp. + Pole diskret $\Rightarrow$ Beh.

b) Sei $P = \{\text{Pole von } f\}$

Wähle $a \in \mathbb{C}$ s.d. für $F_a = a + F$

$\partial F_a \cap P = \emptyset$.

Sei $\Gamma \in Z_1(\mathbb{C})$ mit $\operatorname{sp}\Gamma = \partial F_a$
Γ pos. orientiert.

Residuensatz $\Rightarrow$ $\int_{\partial F_a} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z\in P\cap F_a} \operatorname{Res}_z f$

$= 2\pi i \sum_{[z]\in \mathbb{C}/L} \operatorname{Res}_z f$.

Da $\int_a^{a+w_1} f(z)\,dz = \int_{a+w_2}^{a+w_1+w_2} f(z)\,dz$ und $\int_a^{a+w_2} f(z)\,dz = \int_{a+w_1}^{a+w_1+w_2} f(z)\,dz$ $\Rightarrow$ $\int_{\partial F_a} f(z)\,dz = 0$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

(IV.1.5) **Def.** Sei f elliptische Fkt. bzgl L

Dann def. die Ordnung von f auf dem Periodentorus

als
$$\mathrm{Ord}\, f = \sum_{z \in P \cap F_a} \mathrm{ord}_z f \in \mathbb{N}$$

← wie oben $\partial F_a \cap P = \emptyset$

Bem.: $\mathrm{Ord}\, f$ ist gleich dem Abbildungsgrad

von $f : T_L \to \hat{\mathbb{C}}$

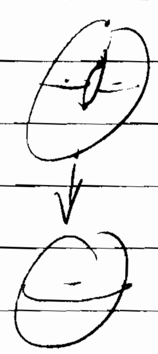
(IV.1.6) **Korolla:** $\mathrm{Ord}\, f \geq 2$ f.a. f elliptische Fkt.

Bew.: $\mathrm{Ord}\, f > 0$ wegen 1. Liouv. Satz

$\mathrm{Ord}\, f = 1 \Rightarrow$ ex. genau ein Pol $z_0 \in P$ und

dieser der Ordnung 1

$\Rightarrow \mathrm{Res}_{z_0} f \neq 0$ ↯ zu 2. Liouv. Satz.



V.1.7 **Def.** Sei f elliptisch und $w_0 \in \hat{\mathbb{C}}$. Betrachte die w_0-Stellen von f.

$$\leadsto \quad \mathrm{ord}_{z_0}(f-w_0) = \begin{cases} \text{Nullstellenordnung von } f-w_0, & w_0 \in \mathbb{C} \\ \text{Pol-Ordnung von } f, & w_0 = \infty \end{cases}$$

für $z_0 \in f^{-1}(w_0)$.

Def. die w_0-Ordnung von f:

$$w_0\text{-}\mathrm{Ord}\, f = \sum_{[z] \in f^{-1}(w_0)} \mathrm{ord}_{[z]}(f-w_0).$$

V.1.8 **Satz** (3. Liouvillescher Satz)

$$\mathrm{Ord}\, f = w_0\text{-}\mathrm{Ord}\, f \quad \text{f.a. } f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L),\ f \neq \text{const}, \ w_0 \in \hat{\mathbb{C}}.$$

d.h. jede nicht konst. ellipt. Fkt nimmt jeden Wert gleich oft (mit Vielfachheit!) an.

Beweis: f doppelperiodisch

$\Rightarrow$ f' ebenfalls elliptisch

$$\Rightarrow \quad g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L)$$

Angenommen $g = \text{const} \Rightarrow f'(z) = c \cdot f(z)$

$$\Rightarrow \quad f(z) = a e^{cz}, \quad a, c \in \mathbb{C}$$

f doppelperiodisch $\Rightarrow c = 0 \Rightarrow f = \text{const}$ ↯.

Also $g \neq \text{const}$.

$$\operatorname{res}_{z_0} g = \begin{cases} \operatorname{ord}_{z_0} f, & f(z_0) = 0 \\ -\operatorname{ord}_{z_0} f, & f(z_0) = \infty \end{cases}$$

2. Liouvillescher Satz $\Rightarrow \sum_{\boxed{z_0} \in \mathbb{C}/L} \operatorname{res}_z g = 0$

$$\Rightarrow \sum_{z \in P \cap F_a} \infty\text{-}\operatorname{ord}_z f = \sum_{z \in f^{-1}(0) \cap F_a} \operatorname{ord}_z f$$

invariant unter $f \mapsto f + c$

$\Rightarrow$ Beh. □

IV.1.9 **Def.:** Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L)$, $f \not\equiv \text{const}$.

$w_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ heißt Verzweigungspunkt von f

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ ex. $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) = w_0$ und $\operatorname{ord}_{z_0}(f - w_0) \geq 2$

bzw. z_0 = Pol der Ordnung ≥ 2, falls $w_0 = \infty$.

IV.1.10 **Kor.** Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L)$, $f \not\equiv \text{const}$, $\operatorname{Ord} f = N$.

Dann hat f nur endlich viele Verzweigungspunkte

$w_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ und $f^{-1}(w_0) \subset T_L$ ist endlich

und $\# f^{-1}(w_0) = \begin{cases} N, & \text{falls } w_0 \text{ kein Verzw.pkt} \\ < N, & \text{sonst.} \end{cases}$

IV.1.11 **Lemma:** $w_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ ist Verzweigungspkt

von $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L)$, $f \not\equiv \text{const}$

$\Leftrightarrow$ $f'(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in f^{-1}(w_0)$.

Bew.: w_0 VP $\Leftrightarrow$ ex. $z_0 \in f^{-1}(w_0)$ mit $\operatorname{ord}_{z_0}(f - w_0) \geq 2$

$\Leftrightarrow$ $f(z) = w_0 + a_2(z - z_0)^2 + \ldots$ lokal bei z_0

$\Leftrightarrow$ $f(z_0) = w_0$ und $f'(z_0) = 0$

$\square$

BRUNNEN

§2. Die Weierstraß-P-Funktion

Frage: Existenz von elliptischen Funktionen?

Wie viele?

speziell: Suche elliptische Funktionen mit Ord $f = 2$.

Versuch: $f(z) = \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z-\omega)^2}$

offenbar L-doppelperiodisch und Pole der Ordnung 2

aber: Standardgitter $L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$

$z = 0$: $\omega = m + ni \Rightarrow \left|\frac{1}{(z-\omega)^2}\right| = \left|\frac{1}{(m+ni)^2}\right| = \frac{1}{m^2+n^2}$

aber $\sum_{m,n \in \mathbb{N}} \frac{1}{m^2+n^2}$ konvergiert nicht

V.2.1 Satz und Definition

Sei $L \subset \mathbb{C}$ Gitter, dann ist

$$\wp(z;L) = \wp(z) = \begin{cases} \infty, & z \in L \\ \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right], & z \notin L \end{cases}$$

eine auf $\mathbb{C} \setminus L$ holomorphe Funktion.

Bew.: 1) Übung: Für $\alpha > 0$.

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} \text{ konvergiert}$$

$$\overset{!}{\Leftrightarrow} \int_{\{x^2+y^2 \geq 1\}} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha} \text{ ex.}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \frac{r\,dr\,d\varphi}{r^{2\alpha}} \text{ konv.}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^\infty r^{1-2\alpha}\,dr \text{ konv.} \Leftrightarrow 1-2\alpha < -1$$

$$\Leftrightarrow \alpha > 1.$$

2) Sei $s>2$, dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{\omega\in L\setminus\{0\}} |\omega|^{-s}.$$

Bew.: Sei $L=\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$, ω_1,ω_2 $\mathbb{R}$-lin. unabh.

Sei $f(x,y)=\dfrac{|x\omega_1+y\omega_2|^2}{x^2+y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$

$\Rightarrow$ $f(\lambda v)=f(v)$ f.a. $\lambda\neq 0$

S^1 kp. $\Rightarrow$ ex. $0<m<M$ mit

$m\leq f(v)\leq M$ f.a. $v\in\mathbb{R}^2$,

nämlich $m=\min_{S^1} f$, $M=\max_{S^1} f$

Also $|x\omega_1+y\omega_2|^2\geq m(x^2+y^2)$ f.a. $x,y\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \sum_{\omega\in L\setminus\{0\}}\frac{1}{|\omega|^s}=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}\frac{1}{|m\omega_1+n\omega_2|^s}$$

$$\leq\frac{1}{m^{\frac{s}{2}}}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{s}{2}}}$$

kv. nach Schritt 1, da $\frac{s}{2}>1$.

(149)

3) Sei $M \subset L \setminus \{0\}$.

Beh.: $\sum_{\omega \in M} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$

ist eine ~~ein~~ $\mathbb{C} \setminus M$ normal konvergente Funktionenreihe.

Bew.: $\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{\omega^2 - z^2 + 2z\omega - \omega^2}{(z-\omega)^2 \omega^2} \right|$

$= \frac{|z| \cdot |z - 2\omega|}{|z-\omega|^2 |\omega|^2}$

Für $z \in \overline{B_r(0)}$ und $|\omega| > 2r$

$\Rightarrow \quad |z - 2\omega| < r + 2|\omega| < \frac{5}{2} |\omega|$

$|z-\omega| > |\omega| - |z| > |\omega| - r > \frac{1}{2} |\omega|$

$\Rightarrow \quad \frac{|z| \cdot |z - 2\omega|}{|\omega|^2 |z-\omega|^2} < \frac{r}{|\omega|^2} \cdot \frac{5}{2} |\omega| \cdot \frac{4}{|\omega|^2} = \frac{10 r}{|\omega|^3}$

$\overset{2)}{\Rightarrow} \sum_{\omega \in M} \left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right|$ ist f.a. $z \in \mathbb{C} \setminus M$ auf einer hinreichend kleinen Umgebung $U(z)$ beschränkt.

$\Rightarrow$ Satz von Markel auf $U(z)$ anwendbar

$\Rightarrow$ normale Kvg. auf $U(z)$, d.h. lokal gleichm.

$\Rightarrow$ Limesfkt. holomorph auf $\mathbb{C} \setminus M$. $\square$

BRUNNEN

Untersuche nun Verzweigungspunkte von $\wp$

Suche $[z_0] \in \mathbb{C}/L$ mit $\wp'(z_0) = 0$.

IV.2.3 Lemma: $\wp'(z_0) = 0 \Leftrightarrow z_0 \notin L$ und $2z_0 \in L$

Insbesondere hat $\wp'$ auf $\mathbb{C}/L$

genau 3 Nullstellen und alle sind einfach,

d.h. $\operatorname{ord}_{z_0} \wp' = 1$.

Beweis Sei $2z_0 \in L$ mit $z_0 \notin L$

$$\Rightarrow \wp'(z_0) = \wp'(z_0 - 2z_0), \text{ da } L\text{-periodisch}$$
$$= \wp'(-z_0)$$
$$= -\wp'(z_0), \text{ da } \wp \text{ gerade}$$

$z_0 \notin L \Rightarrow z_0$ kein Pol von $\wp \Rightarrow \wp'(z_0) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\omega_1, \frac{1}{2}\omega_2, \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ sind

3 versch. Nullstellen von $\wp'$

IV.2.2 v) $\Rightarrow \operatorname{Ord} \wp' = 3$

$\Rightarrow$ dies müssen die einzigen Nullstellen von $\wp'$ sein und alle 3 einfach

$\square$

IV.24 Def. + Prop.

Die Werte $e_1 = \wp(\frac{\omega_1}{2})$, $e_2 = \wp(\frac{\omega_2}{2})$, $e_3 = \wp(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})$

heißen die Halbwerte von $\wp$

Bis auf Umnummerierung hängen sie nur von L ab.

Zusammen mit ∞ sind dies genau die

Verzweigungspunkte von $\wp$

Da $\mathrm{ord}_{\frac{\omega_1}{2}}(\wp - e_1) = 2$, analog für e_2, e_3

gilt $\# \wp^{-1}(e_i) = 1$,

also e_1, e_2, e_3 endlich und paarweise verschieden.

und $\# \wp^{-1}(w) = 2$ f.a. $w \in \mathbb{C} \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$

Ex. genau 4 Verzweigungspunkte für die

verzweigte 2:1 - Überlagerung $\wp : \mathbb{C}/L \to \hat{\mathbb{C}}$

Außerdem gilt:

$$\wp(z) = \wp(z') \Leftrightarrow z \equiv \pm z' \bmod L$$

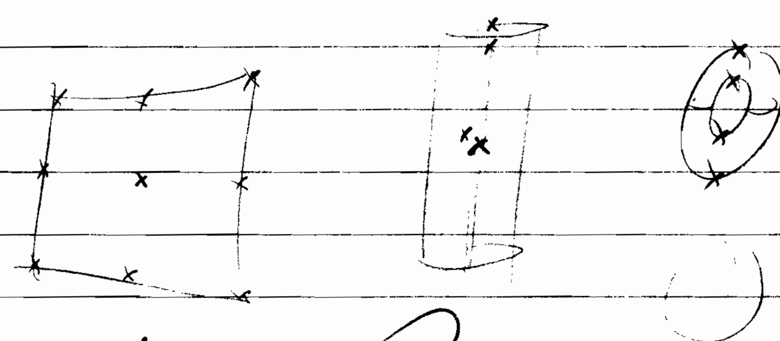
Bew.: Sei $z' \in \mathbb{C} \setminus L$ fest und betrachte

$$f(z) = \wp(z) - \wp(z'), \quad \wp(z') \neq \infty$$

$\Rightarrow$ $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L)$ elliptisch der Ordnung 2

3. Liouville $\Rightarrow$ f hat genau 2 Nullstellen

f gerade $\Rightarrow$ $[f(z) = 0 \iff z = \pm z' \bmod L]$ $\square$



IV.2.5 Laurentreihe von $\wp$

Wissen bereits $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$

mit Kv.-Radius des Nebenteil $= \min\{|w| \mid w \in L \setminus \{0\}\}$

Betrachte Nebenteil $f(z) = \wp(z) - \frac{1}{z^2}$,

$$a_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}$$

Beh.: $f^{(n)}(z) = (-1)^n (n+1)! \cdot \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{(z-w)^{n+2}}$

Bew. durch Induktion

$\underline{n=1}$: $f'(z) = \sum_{w \in L \setminus \{0\}} (-2) \frac{1}{(z-w)^3}$ aus Formel für $\wp$.

$\underline{n \to n+1}$: klar. $\square$

Def. Sei $G_n := \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{w^n}$, $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$

$(G_n)_{n \geq 3}$ heißt die Eisenstein-Reihe zum Gitter L. Sie konvergiert absolut (siehe I.2.1)

Also $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot G_{2n+2} \cdot z^{2n}$

in $B_r(0) \setminus \{0\}$ mit $r = \min\{|w| \mid w \in L \setminus \{0\}\}$.

Bem. $G_n = \sum_{w \in L \setminus \{0\}} w^{-n} = (-1)^n \sum_{w \in L \setminus \{0\}} w^{-n} = (-1)^n G_n$,

da L punktsymmetrisch

$\Rightarrow G_{2k+1} = 0$ f.a. $k \in \mathbb{N}$

§3. Körper der elliptischen Funktionen

(V.3.1) Def: Im Folgenden sei

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$$

ein festes Gitter, dann bezeichne mit

$$K(L) := \mathcal{M}(\mathbb{C}/L) = \{ f : \mathbb{C}/L \to \hat{\mathbb{C}} \text{ elliptisch} \}$$

den Körper der elliptischen Funktionen.

Sei $f \in K(L)$ fest und betrachte die Körperabbildung

$$\mathbb{C}(w) \to K(L)$$
$$R = \frac{P}{Q} \mapsto R(f), \quad R(f)(z) = \frac{P(f(z))}{Q(f(z))}$$

mit $\mathbb{C}(w)$ = Körper der rationalen Funktionen $R : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$

Dies ist eine injektive Körpereinbettung, denn

$f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L)$, $f \neq \text{const} \Rightarrow f : \mathbb{C}/L \to \hat{\mathbb{C}}$ surjektiv

und $R(w) = R'(w)$ f.a. $w \in \hat{\mathbb{C}} \Rightarrow R = R'$

→ Def: $\mathbb{C}(f) \subset K(L)$ der von $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/L)$ erzeugte Unterkörper

V.3.2 **Satz:** Sei $f \in K(L)$ elliptisch

mit Polstellenmenge $P(f) \subset L$

und $f(z) = f(-z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Dann ex. $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$

mit $f = p(\wp)$, d.h.

$$f(z) = a_0 + a_1 \wp(z) + \ldots + a_n \wp(z)^n.$$

Bew. Induktion nach $\operatorname{Ord} f$.

(1) $\operatorname{Ord} f = 0$: $\Rightarrow$ $f = \text{const} = a_0$ $\Rightarrow$ wähle $p(z) = a_0$.

(2) Sei $n = \operatorname{Ord} f$, $n > 0$.

$\Rightarrow$ f hat einen Pol.
Voraus. $\Rightarrow$ dieser Pol liegt in $[0]$.

Betrachte die Laurent-Entwicklung von f um 0,
beachte $f(-z) = f(z)$

$$\Rightarrow \quad f(z) = a_{-2m} z^{-2m} + \ldots + a_{-2} z^{-2}$$
$$+ a_0 + a_2 z^2 + \ldots$$

Betrachte $g(z) := f(z) - a_{-2m} \cdot \wp(z)^m$

BRUNNEN

$\Rightarrow$ g elliptisch bzgl. L, $g(-z) = g(z)$,

Pole von g $P(g) \subset L$.

und $\operatorname{Ord} g < \operatorname{Ord} f$.

Ind.-Annahme $\Rightarrow$ $g(z) = p \circ \wp$ f.e. $p \in \mathbb{C}[z]$

$\Rightarrow$ $f(z) = p \circ \wp + a_{2m} \cdot \wp(z)^m$

$= q \circ \wp$, $q(z) = p(z) + a_{2m} z^m \in \mathbb{C}[z]$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

IV.3.3 **Def. + Satz**

Betrachte $K_+(L) := \{ f \in K(L) \mid f \text{ gerade d.h. } f(-z) = f(z) \}$

$\Rightarrow$ $K_+(L)$ ist ein Unterkörper von $K(L)$.

Es gilt: $K_+(L) = \mathbb{C}(\wp)$,

d.h. $\forall f \in K_+(L)$ $\exists R \in \mathbb{C}(z)$

s.d. $f = R \circ \wp$

BRUNNEN

Beweis: Sei $f \in K_\Gamma(L)$, $f \neq$ const

mit $a \in P(f) \setminus L$ Polstelle nicht in L.

Für $g(z) := (\wp(z) - \wp(a))^N \cdot f(z)$.

$\mathrm{Ord}\,\wp = 2 \Rightarrow \mathrm{ord}_a(\wp - \wp(a)) \in \{1,2\}$

Für $N \geq \mathrm{ord}_a f \Rightarrow g$ hat hebbare Sing. in a.

f hat in $\mathbb{C}/L$ nur endlich viele Polstellen,

davon $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{C} \setminus L$

und $N_1, \dots, N_r \in \mathbb{N}$ so, daß

$$g(z) = f(z) \cdot \prod_{j=1}^{r} (\wp(z) - \wp(a_j))^{N_j}$$

nur Pole in L.

Satz V 3.2 $\Rightarrow g \in \mathbb{C}[\wp]$

$\Rightarrow f \in \mathbb{C}(\wp)$.

BRUNNEN

(V.34) Theorem
$$\boxed{K(L) = \mathbb{C}(\wp) + \mathbb{C}(\wp)\cdot\wp'}$$

Beweis „$\supset$": klar.

„$\subset$": Sei $f \in K(L)$.

Setze $f_+(z) := \frac{f(z)+f(-z)}{2}$, $f_-(z) = \frac{f(z)-f(-z)}{2}$

$\Rightarrow \quad f_+ \in K_+(L) = \mathbb{C}(\wp)$

f_- ungerade, $\wp'$ ungerade $\Rightarrow \frac{f_-}{\wp'} \in K_+(L) = \mathbb{C}(\wp)$

$\Rightarrow \quad f_- \in \mathbb{C}(\wp)\cdot\wp'$

$\Rightarrow \quad f = f_+ + f_- \in \mathbb{C}(\wp) + \mathbb{C}(\wp)\cdot\wp'$.

$\square$

(V.3.5) Beispiel

Betrachte $f(z) = (\wp')^2$ zu einem Gitter L.

$\Rightarrow f \in K_*(L)$ mit $\operatorname{ord} f = 6$.

$\Rightarrow$ ex. $p(w) \in \mathbb{C}[w]$ mit $(\wp')^2 = p \circ \wp$.

Bestimme $p(w)$:

1) Wissen $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) G_{2n+2} z^{2n}$

$$= \frac{1}{z^2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + 7G_8 z^6 + \ldots$$

2) $\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4 z + 20 G_6 z^3 + 42 G_8 z^5 + \ldots$

3) $(\wp(z))^2 = \frac{1}{z^4} + 6G_4 + 10 G_6 z^2 + (9G_4^2 + 14 G_8) z^4 + \ldots$

4) $(\wp(z))^3 = \frac{1}{z^6} + 9G_4 \frac{1}{z^2} + 15 G_6 + \ldots$

5) $(\wp'(z))^2 = \frac{4}{z^6} - 24 G_4 \frac{1}{z^2} - 80 G_6 + \ldots$

$\Rightarrow \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 = -60 G_4 \frac{1}{z^2} - 140 G_6 + \ldots$

$\Rightarrow \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60 G_4 \wp(z) = -140 G_6 + O(z^2)$

$\Rightarrow (\wp')^2 - 4\wp^3 + 60 G_4 \wp$ ist elliptisch ohne Polstelle

$\Rightarrow$ " $= \text{const} = -140 G_6$

$\Rightarrow (\wp')^2 = p \circ \wp$ mit $\boxed{p(w) = 4w^3 - 60 G_4 w - 140 G_6}$

BRUNNEN

Also

(V.3.5) **Theorem:** Sei $L \subset \mathbb{C}$ Gitter und $\wp$ die zugehörige Weierstraß-$\wp$-Funktion. Seien $G_n = \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^n}$, $n \geq 3$ die zugehörigen Eisenstein-Reihen und

$$g_2 = 60 \cdot G_4, \quad g_3 = 140 \cdot G_6$$

Dann löst $\wp$ die algebraische Dgl.

$$\boxed{(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3}$$

Also (1) $\wp$ ist als Lösung einer nicht linearen kpxen Dgl. 1. Ordnung bestimmt.

(2) $2\wp' \cdot \wp'' = 12\wp'\wp^2 - g_2\wp'$

$$\Rightarrow \wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2$$

(3) $\wp''' = 12\wp' \cdot \wp$.

BRUNNEN