Kapitel I: Komplexe Zahlen u. komplexe Differenzierbarkeit

I.1 Wiederholung

▷ $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$, $\quad i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{pmatrix}, \quad i^2 = -1$$

▷ Übungsaufgabe: $\mathbb{C} \to M(2\times 2, \mathbb{R})$

$$a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ist ein injektiver Ring-Homomorphismus

▷ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ mit Topologie von $\mathbb{R}^2$, der $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

$$\bar{z} = x - iy$$

ist ein vollständiger Körper.

▷ $\mathbb{C}[z] = \{ a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \}$

ist der Ring der komplexen Polynome

I.1.1 **Theorem** (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes Polynom $f(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) \neq const$ hat eine Nullstelle.

I.1.2 **Korollar:** $\forall f(z) \in \mathbb{C}[z]$ $\exists n_i \in \mathbb{N}$, $z_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, k$,
$f(z) = a_0 + \ldots + a_n z^n$

s.d. $n_1 + \ldots + n_k = n$ und

$$f(z) = \prod_{i=1}^{k} (z - z_i)^{n_i}.$$

Bew.: I.1.1 + Divisionsalgorithmus.

Also: $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Beweis des Fundamentalsatzes I.1.1.:

Schritt 1: Betrachte die Funktion

$$g : \mathbb{C} \to [0,\infty),\ g(z) := |f(z)|^2$$

Dann gilt $\lim\limits_{|z|\to\infty} g(z) = \infty$.

Eine solche Funktion heißt koerziv.

Bew.: Sei $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$

$$\Rightarrow g(z) = |a_0|^2 + \ldots + |a_n|^2 |z|^{2n},\quad n \geq 1,\ a_n \neq 0$$

$$= h(z) + |a_n|^2 |z|^{2n}$$

mit $\lim\limits_{|z|\to\infty} \frac{h(z)}{|z|^{2n}} = 0$

Also $g(z) = |z|^{2n}\Big(\underbrace{|a_n|^2}_{\neq 0} + \underbrace{\frac{h(z)}{|z|^{2n}}}_{\to 0}\Big) \Rightarrow$ Beh.

Schritt 2: Eine koerzive stetige Funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$

besitzt ein Minimum, $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $\varphi(z_0) = \inf_{\mathbb{C}} \varphi(z)$.

Bew.: Sei $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ mit $\varphi(z_n) \to \inf_{\mathbb{C}} \varphi(z)$.

$\Rightarrow (z_n)$ ist eine beschränkte Folge $\subset \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ ex $(n_k) \nearrow$ s.d. $z_{n_k} \to z_0$

$\Rightarrow \varphi(z_0) = \inf_{\mathbb{C}} \varphi$.

Schritt 3: Jedes lokale Minimum von $\varphi = |f|^2$

ist eine Nullstelle von f.

(lokale)

Bew.: a) OBdA $z_0 = 0$ ist das Minimum von φ.

b) OBdA $f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$, $n \geq 1$,
falls f keine Nullstelle in 0 hat. $a_n \neq 0$.

$$\Rightarrow \varphi(z) = 1 + a_1 z + \overline{a_1}\,\overline{z} + |a_1|^2 |z|^2 + a_2 z^2 + \overline{a_2}\,\overline{z}^2$$
$$+ a_3 z^3 + \overline{a_3}\,\overline{z}^3 + a_1 \overline{a_2}\, z \overline{z}^2 + \overline{a_1} a_2\, \overline{z} z^2$$
$$+ a_4 z^4 + \ldots$$
$$\vdots$$
$$+ |a_n|^2 |z|^{2n}.$$

Beh.: $\forall i = 1, \dots, n : a_i = 0$.

Bew.: Andernfalls sei $\nu = \min\{i \geq 1 \mid a_i \neq 0\}$

$$\Rightarrow \varphi(z) = 1 + \underbrace{a_\nu z^\nu + \bar{a}_\nu \bar{z}^\nu}_{= 2\,\mathrm{Re}(a_\nu z^\nu)} + \underbrace{\dots + |a_n|^2 |z|^{2n}}_{=: k(z)}$$

in Polarkoord. $a_\nu = \varrho_\nu e^{i\varphi_\nu}, \varrho_\nu > 0$

$$z = r e^{i\vartheta}$$

haben $\lim\limits_{r \to 0} \frac{|k(z)|}{|z|^\nu} = 0$

$$\varphi(z) = 1 + 2\varrho_\nu r^\nu \cos(\varphi_\nu + \nu\cdot\vartheta) + k(z).$$

Sei ϑ_0 so, daß $\cos(\varphi_\nu + \nu\vartheta_0) = -1$

$$\Rightarrow \varphi(r e^{i\vartheta_0}) = 1 + r^\nu\Big(-2\varrho_\nu + \underbrace{\frac{k(z)}{r^\nu}}_{\to 0 \text{ für } r \to 0}\Big)$$

$\Rightarrow$ ex. $r_0 > 0$ s.d. $\varphi(r_0 e^{i\vartheta_0}) < 1$ f.a. $0 < r < r_0$

$\Rightarrow$ 0 ist kein lokales Minimum von φ. $\lightning$

$\square$

I.2 Komplexe Differenzierbarkeit

I.2.1 *Def.:* Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeller VR mit Skalarprodukt.
Eine lineare Abb. $\phi \in \mathcal{L}(V,V)$
heißt *konform* $\Leftrightarrow$ $\langle \phi v, \phi w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$

f.a. $v, w \in V$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$

I.2.2 *Lemma:* Die invertierbaren konformen Abb.
sind genau die winkeltreuen Abb.,
d.h. $\dfrac{\langle \phi v, \phi w \rangle}{|\phi v| \cdot |\phi w|} = \dfrac{\langle v, w \rangle}{|v| \cdot |w|}$ f.a. $v, w \in V \setminus \{0\}$.

Bew.: „$\Rightarrow$": ✓

„$\Leftarrow$": konform $\Leftrightarrow$ $\phi^* \phi = \lambda \cdot \mathrm{Id}$.

Sei (e_i) ON-Basis

ϕ winkeltreu $\Rightarrow$ $\langle e_i, \phi^* \phi e_j \rangle = \delta_{ij} |\phi e_i| \cdot |\phi e_j|$

$\Rightarrow$ $\phi^* \phi = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

$\langle e_i + e_j, \phi^* \phi (e_i - e_j) \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_i = \lambda_j \quad \forall i,j$

$\Rightarrow$ ϕ konform. $\square$

I.23 **Lemma:** Sei $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

Dann gilt: ϕ konform $\Leftrightarrow$

ϕ $\mathbb{C}$-linear (d.h. $\phi i = i\phi$)

oder ϕ $\mathbb{C}$-antilinear (d.h. $\phi i = -i\phi$).

Bew.: Übung.

$\phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\mathbb{C}$-linear

$\Leftrightarrow$ $a = d$, $b = -c$

$\Leftrightarrow$ ex. $a + ib \in \mathbb{C}$ mit

$\phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a - ib) \cdot (x + iy)$.

I.24 **Def.:** Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$

und $f : D \to \mathbb{C}$.

f heißt <u>komplex differenzierbar in z_0</u>

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ ex.

Dann ist dieser Grenzwert def. als $f'(z_0) \in \mathbb{C}$.

I.2.5 Satz: $f : D \to \mathbb{C}$ wie oben

ist komplex diff'bar in z_0

$\Leftrightarrow$ $f : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ ist reell diff'bar (mehrdim)

und $Df(z_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ist $\mathbb{C}$-linear.

Dann gilt: Die Jakobimatrix von f in z_0

ist gegeben durch $Jf(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

mit $a + ib = f'(z_0)$.

I.2.6 Korollar: Sei $f = (u,v) : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ wie oben.

Dann ist f komplex diff'bar in z_0

$\Leftrightarrow$ $f = (u,v)$ ist reell diff'bar in z_0 und

die Koord.-funktionen (u,v) lösen in z_0

die Cauchy-Riemann-Dgl.

$$\partial_x u(z_0) = \partial_y v(z_0)$$
$$\partial_y u(z_0) = -\partial_x v(z_0).$$

Bew. von I.2.5: Übung.

I.2.7 **Def.:** ▷ $D \subset \mathbb{C}$ heißt Gebiet

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\emptyset \neq D$ ist offen und zusammenhängend.

▷ $f: D \to \mathbb{C}$ heißt holomorph

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ f ist komplex diff'bar in allen $z_0 \in D$

▷ $\mathcal{O}(D) := \{ f \in C^1(D, \mathbb{C}) \mid f \text{ holomorph in } D \}$

Bem.: $\mathcal{O}(D)$ ist ein Ring, d.h.

$$f, g \in \mathcal{O}(D) \Rightarrow f+g,\ \lambda f,\ f \cdot g \in \mathcal{O}(D)$$
$\lambda \in \mathbb{C}$

$$f(z) \neq 0 \text{ f.a. } z \in D \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{O}(D).$$

Bew. wie in $\mathbb{R}^2$.

I.2.8 **Theorem (Offenheitssatz):** Sei $f \in \mathcal{O}(D)$ auf Gebiet D

mit $f'(z) \neq 0$ f.a. $z \in D$.

Dann bildet f offene Teilmengen von D auf offene Mengen ab.

Bew.: $f'(z) \neq 0 \overset{\text{Umkehrsatz}}{\Leftrightarrow} f$ ist lokaler Diffeo in z_0 □

I.29 Bem. + Satz:

Eine holomorphe Funktion $f: D \to \mathbb{C}$

löst die Cauchy-Riemann-Dgl. auf D

$f = u + iv$, $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

Dies ist ein ~~Beispiel von ell~~

elliptisches System von partiellen Dgl. 1. Ordnung.

$\varphi: D \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch

$\Leftrightarrow \Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$

~~Also~~ Es gilt: $f \in \mathcal{O}(D)$, $\varphi = \operatorname{Re} f$ oder $\operatorname{Im} f$

$\Rightarrow \varphi$ harmonisch.

Bew.: trivial aus CR-Dgl.

Frage: Ist dies umkehrbar?

I.2.10 Satz:

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $u \in C^2(D, \mathbb{R})$ mit $\Delta u = 0$.

Dann ex. $v \in C^2(D, \mathbb{R})$ so daß

$$f = u + iv \in \mathcal{O}(D).$$

Außerdem ist v bis auf $v + const$ 1-dtg bestimmt.

Beweis: Betrachte das Vektorfeld

$$X : D \to \mathbb{R}^2, \quad X(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

mit $P = u_y$, $Q = -u_x$

Dann gilt: $P_y - Q_x = u_{yy} + u_{xx} = \Delta u = 0$

Also $X \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$ erfüllt die Integrabilitätsbedingung

$\overset{!}{\Rightarrow}$ X ist konservativ, d.h. ex. $\tilde{v} \in C^2(D, \mathbb{R})$

mit $X = \nabla \tilde{v} = (\tilde{v}_x, \tilde{v}_y)$

$\Rightarrow$ $u_y = \tilde{v}_x$, $u_x = -\tilde{v}_y$, setze $v = -\tilde{v}$

Dann erfüllt (u, v) die CR-Dgl.

also $f = u + iv$ ist holomorph nach Satz I.2.6 ☒

I.2.11 Bsp:

(a) $u(x,y) = x^2 - y^2$, $\Delta u = 2-2=0$

$u_x = 2x \stackrel{!}{=} v_y \Rightarrow v = 2xy + g(x)$

$u_y = -2y \stackrel{!}{=} -v_x \Rightarrow v = 2xy + h(y)$

$\Rightarrow g = h = \text{const}$

$\Rightarrow v(x,y) = 2xy + \text{const}.$

(b) Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

eine kpxe Potenzreihe mit pos. Kv.-Radius

$R \in (0, \infty]$.

$\Rightarrow$ $f(z)$ konvergiert normal in $B_R(0)$

und ist dort beliebig oft komplex diff'bar.

(Der Beweis erfolgt genauso wie für reelle Zahlen).

Bsp: $f(z) = e^z$ ist eine holomorphe Funktion

$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, $u = e^x \cos y$
$v = e^x \sin y$

$u_x = e^x \cos y = v_y$

$u_y = -e^x \sin y = -v_x$

I.2.12 Satz

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ ist in $z_0 \in D$ reell differenzierbar

$\Leftrightarrow$ ex. in z_0 stetige Funktionen $g_1, g_2 : D \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(z_0) + g_1(z) \cdot (z - z_0) + g_2(z) \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0)$.

In diesem Fall gilt

$$g_1(z_0) = \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) - i f_y(z_0)\right)$$
$$g_2(z_0) = \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) + i f_y(z_0)\right)$$

Beweis: Sei $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ gegeben durch die Matrix $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Übungsaufgabe: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ komplexe Multipl.

Falls f in z_0 reell diff'bar, so gilt also

$$Df(z_0)[z - z_0] = \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) - i f_y(z_0)\right) \cdot (z - z_0) + \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) + i f_y(z_0)\right) \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0)$$

$$f(z) = f(z_0) + Df(z_0)[z-z_0] + R(z_0,z)$$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{R(z_0,z)}{|z-z_0|} = 0$$

Dann def. $\quad g_1(z) := \frac{1}{2}\big(f_x(z_0) - i f_y(z_0)\big) + \frac{1}{2}\frac{R(z_0,z)}{z-z_0}$, für $z \neq z_0$

$$g_2(z) := \frac{1}{2}\big(f_x(z_0) + i f_y(z_0)\big) + \frac{1}{2}\frac{R(z_0,z)}{\bar z - \bar z_0}$$

$$\Rightarrow f(z) = f(z_0) + g_1(z)(z-z_0) + g_2(z)(\bar z - \bar z_0).$$

„$\Leftarrow$": Üb.aufg. $\square$

I.2.13 Def.: Sei $f: D \to \mathbb{C}$ reell diff'bar in z_0, dann def.

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \frac{1}{2}\big(f_x(z_0) - i f_y(z_0)\big)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0) := \frac{1}{2}\big(f_x(z_0) + i f_y(z_0)\big)$$

Notation: $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$

$$dz = dx + i\,dy, \quad d\bar{z} = dx - i\,dy$$

$$\partial_z = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

Also: f holomorph in D

$\Leftrightarrow$ $f \in C^1(D, \mathbb{C})$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$

$\Leftrightarrow$ $\forall z_0 \in D$: $f(z) = f(z_0) + g_1(z) \cdot (z - z_0)$

f.e. $g_1 : D \to \mathbb{C}$, stetig in z_0.

$g_1(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

Es gilt: $\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$

Kapitel II: Cauchy-Integralsatz

§1. Wegintegrale

(II.1.1) **Def.:** Sei $I = [a, b]$ Intervall

und $f : I \to \mathbb{C}$.

Dann heißt f integrierbar

$:\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : I \to \mathbb{R}$ sind Riemann-int'bar.

In diesem Fall ist

$$\int_I f(t)\,dt := \int_I \operatorname{Re} f(t)\,dt + i \int_I \operatorname{Im} f(t)\,dt.$$

Es gilt: $f \mapsto \int_I f\,dt$ ist $\mathbb{C}$-linear

und $\left| \int_I f\,dt \right| \leq \int_I |f|\,dt$

Analog gilt auch Hauptsatz der Diff.- und Int.-Rechn. für $\mathbb{C}$-wertige f.

II.1.2 Def.: Sei $U \subset \mathbb{C}$ gegeben.

Ein stückweise stetig diff'barer Weg

$$\gamma : [a,b] \to U$$

heißt Integrationsweg in U.

γ heißt geschlossen $\Leftrightarrow \gamma(a) = \gamma(b)$

" " einfach geschlossen $\Leftrightarrow$ γ geschlossen und $\gamma|[a,b)$ ist injektiv

$\gamma([a,b])$ heißt die Spur von γ, $\mathrm{Sp}\,\gamma$

Zusammensetzung von Integrationswegen:

Seien $\gamma_1 : [a,b] \to U$, $\gamma_2 : [c,d] \to U$

Integrationswege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$.

Dann def. $\gamma_1 \# \gamma_2 : [a, b+d-c] \to U$ durch

$$(\gamma_1 \# \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a \le t \le b \\ \gamma_2(t+c-b), & b \le t \le b+d-c \end{cases}$$

$\gamma_1 \# \gamma_2$ ist wieder ein Integrationsweg

und $\#$ ist assoziativ.

Sei $\gamma : [a,b] \to U$ ein Integrationsweg

dann def. $\gamma^{-1} : [a,b] \to U$ durch

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(a+b-t)$$

Eine Kette ist eine formale (!) Summe der Form

$$c = \sum_{\gamma \text{ Integrationsweg}} n_\gamma \cdot \gamma \quad \text{mit } n_\gamma \in \mathbb{Z} \text{ und}$$

nur endlich viele $n_\gamma \neq 0$.

- Die Menge $C_1(U) = \left\{ \sum_{\gamma \text{ I.-Weg in } U} n_\gamma \gamma \text{ Kette in } U \right\}$

bildet eine freie abelsche Gruppe mit

$$\left(\sum_\gamma n_\gamma \gamma \right) + \left(\sum_{\tilde\gamma} m_{\tilde\gamma} \tilde\gamma \right)$$

$$= \sum_\gamma (n_\gamma + m_\gamma) \gamma$$

$c = \sum_\gamma n_\gamma \gamma$ heißt 1-Zykel

$$\Leftrightarrow \sum_\gamma n_\gamma (\gamma(b_\gamma) - \gamma(a_\gamma)) = 0$$

Bsp: Jeder geschlossene Weg ist ein 1-Zykel.

Sei $\gamma: [a,b] \to U$ ein Integrationsweg

und $f: \operatorname{sp}\gamma \to \mathbb{C}$ stetig.

Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\,dt \in \mathbb{C}$$

kpxe. Multipl.

Wohldef.

Bsp.: Sei $\gamma(t) = z_0 + r e^{i 2\pi t}$, $t \in [0,1]$

eine Parametrisierung von $\partial B_r(z_0) = \operatorname{sp}\gamma$

und $f: \partial B_r(z_0) \to \mathbb{C}$, $f(z) = (z-z_0)^k$, $k \in \mathbb{Z}$

Dann gilt: $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 (r e^{2\pi i t})^k 2\pi i r e^{2\pi i t}\,dt$

$$= 2\pi i\, r^{k+1} \int_0^1 e^{2\pi i (k+1) t}\,dt$$

$$= 2\pi i\, r^{k+1} \cdot \begin{cases} 1, & k = -1 \\ \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot e^{2\pi i (k+1) t}\Big|_0^1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\pi i, & k = -1 \\ 0, & k \neq -1 \end{cases}$$

II.1.3 **Lemma:** $\int_\gamma f(z)\,dz$ hängt nur von sp γ und der Orientierung der Parametrisierung ab.

Bew.: Sei $\varphi: [c,d] \to [a,b]$ streng monoton steigend und stückweise diff'bar

$\Rightarrow \tilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi(s))$ wieder ein I.-Weg.

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_c^d f(\gamma(\varphi(s)))\cdot\dot{\gamma}(\varphi(s))\cdot\varphi'(s)\,ds$$

$$\overset{\text{Subst.}}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)\,dt = \int_\gamma f(z)\,dz$$

II.1.4 **Lemma + Def.:** Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Int.-Weg und $f: \text{sp}\,\gamma \to \mathbb{C}$ stetig.

Dann def. $L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\,dt$ =: Länge von γ.

Es gilt: $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq L(\gamma)\cdot\max_{\text{sp}\,\gamma}|f|$

Bew.: „Übung"

BRUNNEN

II.15 **Lemma:** Seien $\gamma_1 : [a,b] \to U$, $\gamma_2 : [c,d] \to U$ I.-Wege

mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ und

f stetig auf $\mathrm{Sp}\, \gamma_1 \# \gamma_2 = \mathrm{Sp}\, \gamma_1 \cup \mathrm{Sp}\, \gamma_2$.

Dann gilt: (a) $\displaystyle\int_{\gamma_1 \# \gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

(b) $\displaystyle\int_{\gamma^{-1}} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz$

(c) $\gamma \mapsto \displaystyle\int_{\gamma} f(z)\,dz$ besitzt eine

1-dtige Fortsetzung zu einem Homomorphismus

$\int_{\cdot} f(z)\,dz : C_1(U) \to \mathbb{R}$

f.a. $f \in C^0(U)$

Beweis: trivial.

Notation: γ geschlossen $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)\,dz =: \oint_{\gamma} f(z)\,dz$

II.1.6 **Def. + Satz:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet.

Dann heißt $F \in \mathcal{O}(U)$ Stammfunktion zu $f \in C^0(U)$, falls $F' = f$.

Für jeden Integrationsweg $\gamma : [a,b] \to U$ gilt dann $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

Bew: Hauptsatz D.+I. $\square$

Korollar: $F' = f$, γ geschlossen $\Rightarrow \oint_\gamma f(z)dz = 0$.

II.1.7 **Satz:** Sei U Gebiet, $f \in C^0(G, \mathbb{C})$ mit $\oint_\gamma f(z)dz$ f.e. geschlossenen I-Wege γ.

Dann besitzt f eine Stammfunktion $F \in \mathcal{O}(U)$.

BRUNNEN