Serie 10

1. Es sei $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein gegebenes Gitter.

a) Gibt es eine elliptische Funktion f zu L mit $\operatorname{Ord} f = 2$ und genau zwei einfachen Polen? Begründe! *2 Punkte*

b) Es sei f eine nicht-konstant elliptische Funktion zu L. *Zeige*: f hat mindestens einen Verzweigungspunkt. *2 Punkte*

2. *Zeige*: Jede elliptische Funktion der Ordnung ≤ 2, deren Pole in ihrem Gitter L enthalten sind ist von der Form $a + b\wp$, wobei $\wp$ die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion zu L ist. *4 Punkte*

3. Es sei $\alpha > 0$. *Zeige*: Die Reihe

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$$

konvergiert genau dann, wenn das Integral

$$\int_{\{x^2+y^2\geq 1\}} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

endlich ist. *4 Punkte*

4. Es seien $e_1 = \wp(\omega_1/2)$, $e_2 = \wp(\omega_2/2)$, $e_3 = \wp(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})$ die Halbwerte zum Gitter $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. *Zeige*:

$$\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)\,.$$

4 Punkte

Rückgabe: In den Kasten am 17.06.

X.1.a. Sei $\wp$ Weierstraß Fkn zu L.

Betrachte $Z := \{z \mid \wp'(z) = 0\}$.

Z ist eine diskrete Menge.

Es folgt, dass $\wp(Z) \neq \mathbb{C}$.

Nimm $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \wp(Z) \neq \emptyset$, und betrachte $f(z) := \wp(z) - w_0$.

Z.z. f hat genau zwei einfachen Nullstellen

- Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) = 0$.

  $\Rightarrow \wp(z_0) = w_0 \Rightarrow f'(z_0) = \wp'(z_0) \neq 0$.

  $\Rightarrow z_0$ ist einfache N.S.
- $\operatorname{ord} f = 2 \Rightarrow \exists$ genau zwei N.S. mod L.

Dann $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ hat genau zwei einfache Pole mod L. #.

X.1.b. f ist nicht-konstante ell. Fkn.

$\Rightarrow f'$ ist nicht-konstante ell. Fkn.

(f' hat Pole in die gleiche Punkte, wie f mit großer Ordnung $\Rightarrow$ $\operatorname{ord} f' > 0 \Rightarrow f'$ ist keine Konst.).

$\Rightarrow Z = \{z \mid f'(z) = 0\} \neq \emptyset \Rightarrow$

f hat Verzweigungspunkte.

X.2. Sei f eine ell Funk., $\operatorname{ord} f \leq 2$ und $\operatorname{Pole}(f) \subset L$.

Sei $\varepsilon \ll 1$. Dann

$$f = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + h(z) \quad z \in \dot{B}_\varepsilon(0)$$

$$h \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(0)).$$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + g(z) \quad z \in \dot{B}_\varepsilon(0)$$

$$g \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(0)).$$

Dann $f(z) - a_{-2}\wp(z) = \dfrac{a_{-1}}{z} + \text{holo Fkn}(z)$

$=: q(z)$.

0 ist eindeutig Pol von q mod L

und $\displaystyle\sum_{\substack{z \in \operatorname{Pole}(q) \\ \operatorname{mod} L}} \operatorname{Res}_z q = a_{-1} = 0.$

$\Rightarrow$ q ist holomorph $\Rightarrow$ $q =$ Konst.

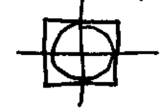
$\Rightarrow f(z) = a + b\,\wp(z).$

X. 3. Sei $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\} \geq 1\}$

Dann $\int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ konvergiert genau

dann wenn $\int\limits_X \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ konvergiert. $\square$

X



Definiere $f, F : X \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \frac{1}{\left(([|x|]+1)^2 + ([|y|]+1)^2\right)^\alpha}$$

$$F(x,y) := \frac{1}{\left([x]^2 + [|y|]^2\right)^\alpha}$$

wobei $[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.

$\Rightarrow \quad [x] \leq x \leq [x]+1 \Rightarrow$

$$f(x,y) \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \leq F(x,y) \quad \forall (x,y) \in X.$$

$\Rightarrow \quad \int\limits_X \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$ konvergiert $\Rightarrow$

$$\int\limits_X f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ |m|\geq 1 \\ |n| \geq 1}} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} \text{ - konvergiert}$$

$\Rightarrow \quad \sum\limits_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m^2+1)^\alpha}$ - konvergiert $\Rightarrow$

$\sum\limits_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{(m^2)^\alpha}$ konvergiert $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\\ |m|\geq 1\\ |n|\geq 1}} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} +$$

$$+ \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{(m^2)^\alpha} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{(n^2)^\alpha} \text{ - konvergiert.}$$

$$\Leftarrow \quad \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} \text{ - konvergiert}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n^2)^\alpha} \text{ - konvergiert}$$

$$\Rightarrow \int_X F(x,y)\,dx\,dy = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} +$$

$$+ 4\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n^2)^\alpha} \text{ - konvergiert}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha} \text{ - konvergiert.}$$

X.4. Erinnerung vom 10.05.10.

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ eines Gitter

- $\mathbb{C}/\Lambda = E$ heißt elliptische Kurve.
- Falls f ~~ist~~ eine ell. Fkn zu Λ ist, dann ~~ist~~ f ~~ist~~ ist wohldefiniert als Funktion $f : E \to \hat{\mathbb{C}}$.
- Ein Divisor auf E ist eine endliche Menge $D \subset E$ zusammen mit eine Funktion $\text{grad}: D \to \mathbb{Z}$.

$$\text{grad}(D) = \sum_{z \in D} \text{grad}(z)$$

- Sei $f : E \to \hat{\mathbb{C}}$ eine ell. Fkn.

Dann $\text{div}\, f := \left\{ (z, n) \;\middle|\; \begin{array}{l} f(z) \in \{0, \infty\} \\ n = \text{ord}_z f \end{array} \right\}$

heißt Divisor von f.

- $\text{grad}(\text{div}\, f) = 0 \quad \forall f \neq 0$ ell. Fkn.
- Falls $f \neq 0, g \neq 0$ zwei ell. Fkn mit $\text{div}\, f = \text{div}\, g \Rightarrow f = cg \quad c \in \mathbb{C}^*$

Zu Aufgabe X. 4.

$\wp$ ist gerade Fkt. $\Rightarrow \wp(z) = \wp(-z) = \wp(\omega_1 - z)$

$\Rightarrow \wp'(z) = -\wp'(\omega_1 - z) \Rightarrow \wp'(\frac{\omega_1}{2}) = 0.$

Analog $\wp'(\frac{\omega_2}{2}) = \wp'(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}) = 0.$

$\Rightarrow \wp(z) - e_1$ hat eine Nullstelle $z = \frac{\omega_1}{2}$

Ordnung 2. $\Rightarrow$

$$\operatorname{div}(\wp(z) - e_1) = \{(0,-2), (\tfrac{\omega_1}{2}, 2)\}.$$

Analog

$$\operatorname{div}(\wp - e_2) = \{(0,-2), (\tfrac{\omega_2}{2}, 2)\}$$

$$\operatorname{div}(\wp - e_3) = \{(0,-2), (\tfrac{\omega_1+\omega_2}{2}, 2)\}.$$

$$\operatorname{div}(\wp') = \{(0,-3), (\tfrac{\omega_1}{2}, 1), (\tfrac{\omega_2}{2}, 1), (\tfrac{\omega_1+\omega_2}{2}, 1)\}$$

$$\operatorname{div}(\wp')^2 = \{(0,-6), (\tfrac{\omega_1}{2}, 2), (\tfrac{\omega_2}{2}, 2), (\tfrac{\omega_1+\omega_2}{2}, 2)\}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\wp')^2 = \operatorname{div}\left((\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)\right)$$

$$\Rightarrow (\wp')^2 = C \cdot (\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3).$$

Finde C: Sei $\varepsilon \ll 1$ und $z \in \mathring{B}_\varepsilon(0)$

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + h_1(z)$$

$$(\wp'(z))^2 = \frac{4}{z^6} + \frac{h_2(z)}{z^3}$$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + h_3(z)$$

$$(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3) = \frac{1}{z^6} + \frac{h_4(z)}{z^4}$$

wobei $h_1, h_2, h_3, h_4 \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z))$.

$\Rightarrow \quad c = 4.$

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3).$$