9.1 (a) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + - \dots$

$\cos^n z = \left(1 - \frac{z^2}{2} + - \dots\right)^n = 1 - n \cdot \frac{z^2}{2} \pm \dots$

$$\Rightarrow \frac{z^{2n-1}}{1-\cos^n z} = \frac{z^{2n-1}}{n \cdot \frac{z^2}{2} \pm \dots} = \frac{2z^{2n-3}}{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 \pm \dots}}_{\text{hol.}}$$

$$n=1: \quad \frac{z^{2n-1}}{1-\cos^n z} = \frac{2}{z} \cdot (1 \pm \dots) \Rightarrow \mathrm{Res}_0 \frac{z^{2n-1}}{1-\cos^n z} = 2$$

$$n>1: \quad \frac{z^{2n-1}}{1-\cos^n z} \text{ hol. in } 0, \text{ also } \mathrm{Res}_0 \frac{z^{2n-1}}{1-\cos^n z} = 0$$

$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + - \dots$

$\sin z - z = -\frac{z^3}{6} + - \dots$

$$\Rightarrow \frac{z^3}{\sin z(\sin z - z)} = \frac{z^3}{\left(z - \frac{z^3}{6} + \dots\right)\left(-\frac{z^3}{6} + - \dots\right)} = \frac{z^3}{-\frac{z^4}{6} \pm \dots}$$

$$= -\frac{1}{6z} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 \pm \dots}}_{\text{hol.}} = -\frac{1}{6z} (1 \pm \dots)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}_0 \frac{z^3}{\sin z(\sin z - z)} = -\frac{1}{6}$$

(b) $f(z) = z^6 - 5z^4 + iz^2 - 2$

$g(z) = -5z^4$

$\Rightarrow |f(z) - g(z)| = |z^6 + iz^2 - 2| \leq |z^6| + |iz^2| + |-2|$

$= 1 + 1 + 2 = 4 < 5 = |g(z)|$ für $|z| = 1$

$\Rightarrow$ f und g besitzen gleich viele Nst. in $|z| < 1$.

$g(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (Ordnung 4)

$\Rightarrow$ f besitzt 4 Nst. in $|z| < 1$.

$f(z) = z^6 + iz^2 - 4z + i$

$g(z) = -4z$

$\Rightarrow |f(z) - g(z)| = |z^6 + iz^2 + i| \leq |z^6| + |iz^2| + |i|$

$= 1 + 1 + 1 = 3 < 4 = |g(z)|$ für $|z| = 1$

$\Rightarrow$ f und g besitzen gleich viele Nst. in $|z| < 1$

$g(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (Ordnung 1)

$\Rightarrow$ f besitzt 1 Nst. in $|z| < 1$

$h(z) = z^6$

$\Rightarrow |f(z) - h(z)| = |iz^2 - 4z + i| \leq |iz^2| + |-4z| + |i|$

$= 4 + 8 + 1 = 13 < 64 = |h(z)|$ für $|z| = 2$

$\Rightarrow$ f und h besitzen gleich viele Nst. in $|z| < 2$

$h(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (Ordnung 6)

$\Rightarrow$ f besitzt 6 Nst. in $|z| < 2$

$\Rightarrow$ f besitzt 5 Nst. in $1 < |z| < 2$.

9.2 (a) n ungerade:

$$x^n+1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + - \dots - x + 1)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\, dx}{x^n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x+1} dx$$

mit $f(x) = \frac{x\cos x}{(x^{n-1} - + \dots + 1)}$, $f(-1) = \frac{-\cos(-1)}{1} \neq 0$

$\Rightarrow$ Sing. in $x=-1$, Integral nicht wohldef.

n gerade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^n+1} dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^n+1} dx = \operatorname{Re}\left(2\pi i \sum_{z_0 \in H} \operatorname{Res}_{z_0} \frac{ze^{iz}}{z^n+1}\right.$$

$$= \operatorname{Re}\left(2\pi i \cdot \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \operatorname{Res}_{\omega_j} \frac{ze^{iz}}{z^n+1}\right)$$

wobei $\omega_j = e^{\frac{\pi i}{n}\cdot(2j+1)}$

(...)

(b) $f \circ f \circ f \circ f = \mathrm{Id}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist bijektiv

$\Rightarrow f$ ist bijektiv, hat also die Gestalt

$f(z) = az + b$

$\Rightarrow \quad b = f(0) = 0$

$f(f(f(f(z)))) = a^4 z = z \quad \forall z$

$\Rightarrow \quad a^4 = 1$

Also vier mögl. Fkt. $f_1(z) = z$, $f_2(z) = iz$, 3 (a) $\exp: G \to \{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ b.hol.

$(z \mapsto iz): \{z \mid \operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{H}$ b.hol.

Cayley-Trsf. $(z \mapsto \frac{z-i}{z+i}) : \mathbb{H} \to \mathbb{E}$ b.hol.

$\Rightarrow f(z) = \dfrac{ie^z - i}{ie^z + i} = \dfrac{e^z - 1}{e^z + 1}$ b.hol. von G nach G'.

Umkehrabb. $f^{-1}(w) = \log\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$,

wobei log Hauptzweig des Logarithmus.

(c) $\sin : G \to G'$ b.hol

(Bilder der Geraden $x = \alpha$ sind die
Hyperbeln $\frac{u^2}{\sin^2\alpha} - \frac{v^2}{\cos^2\alpha} = 1$ für $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), x \in \mathbb{C}$
Gerade $x = 0$ wird auf sich selbst abgebildet)

Umkehrabb. arcsin (Hauptzweig)

(b) $\arcsin : G \to \{z \mid \operatorname{Re} z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ b.hol

$(z \mapsto iz): \{z \mid \operatorname{Re} z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$

$\to \{z \mid \operatorname{Im} z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ b.hol

$(z \mapsto ie^{iz}) . \{z \mid \operatorname{Im} z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\} \to G'$ b.hol nach (a)

$\Rightarrow f(z) = ie^{i\arcsin(z)}$,

Umkehrabb. $f^{-1}(w) = -\sin\left(i \cdot \log\frac{w}{i}\right)$

4 (a) $G \subset \mathbb{C}^*$ einf. zshgd. $\Rightarrow$ gemäß 8.1 (a) ex.
Zweig des log auf G $\Rightarrow$ Def. $f(z) = e^{\frac{1}{n}\log z}$
$\Rightarrow$ f ist Zweig von $z^{\frac{1}{n}}$ (...)

(b) siehe 7.4 (a)