Serie 6

1. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, und $a, b \in \mathbb{C} \setminus U$ liegen in derselben Zusammenhangskomponente.
Zeige: Es existiert eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ mit

$$\big(f(z)\big)^2 = (z-a)(z-b) \quad \text{f.a. } z \in U\,.$$

4 Punkte

2. **a)** Berechne den Hauptteil der Laurent-Entwicklung der folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten:

$$\tfrac{z-1}{\sin^2 z} \text{ für } 0 < |z| < \pi, \qquad \frac{ze^{iz}}{(z^2+b^2)^2} \text{ für } 0 < |z-ib| < 2b,\ b > 0$$

2 Punkte

b) Für folgende Funktionen f und Punkte z_o bestimme man die Art der Singularität von f in z_o. Bei hebbaren Singularitäten bestimme man den Grenzwert von f, für Pole gebe man den Hauptteil an:

$$\tfrac{1}{1-e^z} \text{ in } z_o = 0, \qquad \frac{\cos z - 1}{z^6} \text{ in } z_o = 0,$$
$$\cos\left(\tfrac{1}{z}\right) \text{ in } z_o = 0, \qquad \sin(\pi/(z^2+1)) \text{ in } z_0 = i\,.$$

2 Punkte

3. **a)** Man berechne die folgenden Residuen

$\operatorname{res}_0 \frac{z^{n-1}}{\sin^n z}$, $\operatorname{res}_0 \frac{\sin 2z - 2\sin z}{\sin z(\sin z - z)}$,

$\operatorname{res}_0 \frac{\tan z - z}{(1-\cos z)^2}$, $\operatorname{res}_0 \frac{z-1}{\operatorname{Log}(z+1)}$,

wobei Log der Zweig des Logarithmus auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ ist. *2 Punkte*

b) Es sei f holomorph in einer Umgebung von z_o, es gelte $f'(z_o) \neq 0$, und die Funktion g habe einen Pol 1. Ordnung in $w_o = f(z_o)$. Drücke $\operatorname{res}_{z_o} g \circ f$ durch $\operatorname{res}_{w_o} g$ aus. *2 Punkte*

4. Berechne:

$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{1-2a\cos t + a^2}\,dt,\ a \in \mathbb{R}$ $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,dx$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n},\ a, b > 0,\ n \in \mathbb{N}$ $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2}\,dx,\ a > 0$

$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{16+x^2}\,dx,$ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-\pi i x/2}}{x^2-2x+5}\,dx\,.$

4 Punkte

Rückgabe: In den Kasten am 20.05.

VI.1 Sei $g(z) = (z-a)(z-b) = (z-b)^2 \frac{z-a}{z-b}$

$(g : U \to \mathbb{C}) \in \mathcal{O}(U)$

Nach Serie ~~4~~ 5 Aufgabe 4b., es gibt

$\ln\left(\frac{z-a}{z-b}\right) : U \to \mathbb{C}$ wohldefinierte holomorphe Funktion, mit $e^{\ln\left(\frac{z-a}{z-b}\right)} = \frac{z-a}{z-b}$

Definiere $f(z) := (z-b) \cdot e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z-a}{z-b}\right)}$

$f : U \to \mathbb{C}$ ist holomorph und

$(f(z))^2 = (z-b)^2 e^{\ln\left(\frac{z-a}{z-b}\right)} =$

$= (z-b)^2 \frac{z-a}{z-b} = (z-a)(z-b)$. auf U.

VI.2.a $$\frac{z-1}{\sin^2 z} = \frac{z}{\sin^2 z} - \frac{1}{\sin^2 z}. \qquad 0<|z|<\pi$$

- $\frac{z}{\sin^2 z}$ hat einfach Pol in $z=0$.

$$\operatorname{Res}_0 \frac{z}{\sin^2 z} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{\sin^2 z} = 1$$

Hauptteil der F $\frac{z}{\sin^2 z}$ ist $\frac{1}{z}$.

- $\frac{1}{\sin^2 z}$ hat Pol ord$=2$ in $z=0$

$$a_{-2} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{\sin^2 z} = 1.$$

$$a_{-1} = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{\sin^2 z}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{2z\sin^2 z - 2z^2 \sin z \cos z}{\sin^4 z}$$

$$= 2\cdot \lim_{z\to 0} \frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z} = 2\cdot \lim \frac{\left(z-\frac{z^3}{6}\right) - z\left(1-\frac{z^2}{2}\right)}{z^2}$$

$$= 0$$

$$\frac{z-1}{\sin^2 z} = \frac{-1}{z^2} + \frac{1}{z} + h(z) \qquad h \in \mathcal{O}(B_\pi(0))$$

$$\frac{z e^{iz}}{(z^2+b^2)^2} = \frac{1}{(z-ib)^2} \cdot \frac{z e^{iz}}{(z+ib)^2}$$

$\frac{z e^{iz}}{(z+ib)^2}$ ist holomorph auf $\{ |z-ib|<2b\}$

und $= a_0 + a_1(z-ib) + o(z-ib)$

$$a_0 = \frac{z e^{iz}}{(z+ib)^2}\Bigg|_{z=ib} = \frac{ib\, e^{-b}}{(2ib)^2} = \frac{-i\cdot e^{-b}}{4b}$$

$$a_1 = \frac{d}{dz}\frac{z e^{iz}}{(z+ib)^2}\Bigg|_{z=ib} = \cancel{2(z+ib)\,z e^{iz}}$$

$$= \frac{(1+iz)e^{iz}(z+ib)^2 - 2(z+ib)\cdot z e^{iz}}{(z+ib)^4}\Bigg|_{z=ib} =$$

$$= \frac{(1-b)e^{-b}(2ib) - 2ib\cdot e^{-b}}{(2ib)^3} =$$

$$= \frac{+e^{-b}}{4b}.$$ Also

$$\frac{z e^{iz}}{(z^2+b^2)^2} = \frac{-i e^{-b}}{4b}\cdot\frac{1}{(z-ib)^2} + \frac{e^{-b}}{4b}\,\frac{1}{z-ib} +$$

$$+ h(z), \quad h \in \mathcal{O}(B_{2b}(ib))$$

VI. 2. 6

- $$\frac{1}{1-e^z} = \frac{1}{1-\sum_0^\infty \frac{z^k}{k!}} = \frac{1}{z\cdot\sum_{k=1}^\infty \frac{z^{k-1}}{k!}} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\frac{\sum_{k=2}^\infty \frac{z^{k-2}}{k!}}{\sum_{k=1}^\infty \frac{z^{k-1}}{k!}}}_{\in \mathcal{O}(B_\varepsilon(0))} \quad ; \quad \text{Pole ord} = 1.$$

- $$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{-2k}}{(2k)!} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{k=-1} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(-2k)!}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{1}_{\in \mathcal{O}(\mathbb{C})}$$

Wesentliche Singularität

- $$\frac{\cos z - 1}{z^6} = \frac{\sum_{k=0}^\infty (-1)^k z^{2k}/(2k)! - 1}{z^6} = \underbrace{\cancel{\frac{1}{z^6}} - \frac{\frac{1}{2}}{z^4} + \frac{\frac{1}{24}}{z^2}}_{\text{Hauptteil}} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+6)!}}_{\in \mathcal{O}(\mathbb{C})} \qquad \text{Pole ord} = 4.$$

-

VI. 3. a.

- $\operatorname{res}_0 \dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z} = \lim_{z\to 0} \dfrac{z^n}{\sin^n z} = 1$

- $\operatorname{res}_0 \dfrac{\sin 2z - 2\sin z}{\sin z(\sin z - z)} = \operatorname{res}_0 \dfrac{\left(2z - \frac{8z^3}{6} + O(z^5)\right) -}{\left(z - O(z^3)\right)}$

$$\frac{-\left(2z - \frac{\cancel{4}z^3}{6} + O(z^5)\right)}{\left(-\frac{z^3}{6} + O(z^5)\right)} =$$

$$= \operatorname{res}_0 \frac{-z^3 + O(z^5)}{z^4\left(1 - O(z^2)\right)\left(\frac{-1}{6} + O(z^2)\right)} = 6$$

- $\operatorname{res}_0 \dfrac{\tan z - z}{(1-\cos z)^2} = \operatorname{res}_0 \dfrac{\sin z - z\cos z}{\cos z\,(1-\cos z)^2} =$

$$= \operatorname{res}_0 \frac{\left(z - \frac{z^3}{6} + O(z^5)\right) - \left(z - \frac{z^3}{2} + O(z^5)\right)}{\left(1 + O(z^2)\right)\left(\frac{z^2}{2} + O(z^4)\right)} =$$

$$= \operatorname{res}_0 \frac{z^3 \cdot \left(\frac{1}{3} + O(z^2)\right)}{z^4\left(1 + O(z^2)\right)\left(\frac{1}{2} + O(z^2)\right)} = \frac{2}{3}.$$

- $\operatorname{res}_0 \dfrac{z-1}{\operatorname{Log}(z+1)} = \dfrac{(z-1)\big|_{z=0}}{\frac{d}{dz}\operatorname{Log}(z+1)\big|_{z=0}} =$

$$= \frac{-1}{\frac{1}{z+1}\big|_{z=0}} = -1.$$

VI.3.6. $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit

$$f|_{B_\varepsilon(z_0)} : B_\varepsilon(z_0) \to f(B_\varepsilon(z_0)) =: U \text{ ist}$$

eine biholomorphe Abbildung.

Sei $h : U \to B_\varepsilon(z_0)$ eine Inverse von $f|_{B_\varepsilon(z_0)}$

Dann gilt $h'(w_0) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$.

Rechne $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot g(f(z)) =$

$\boxed{\begin{array}{l} w = f(z) \\ z \to z_0 \Leftrightarrow \\ w \to w_0 \end{array}}$

$$= \lim_{w \to w_0} \big(h(w) - h(w_0)\big) \cdot g(w) =$$

$$= \lim_{w \to w_0} \frac{h(w) - h(w_0)}{w - w_0} \cdot (w - w_0) \cdot g(w) =$$

$$= h'(w_0) \cdot \operatorname{res}_{w_0} g = \frac{\operatorname{res}_{w_0} g}{f'(z_0)} \notin \{0, \infty\}$$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ hat Pol 1. Ordnung in z_0

und $\operatorname{res}_{z_0} g \circ f = \dfrac{\operatorname{res}_{w_0} g}{f'(z_0)}$

VI. 4. 1) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{1-2a\cos t+a^2}\,dt =$

$$2\pi \sum_{z\in E} \mathrm{res}_z \frac{\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)^2}{z\left(1-\frac{2a}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+a^2\right)} =$$

(Sei $|a|>1$)

$$\overset{2\pi}{=}\sum_{z\in E} \mathrm{res}_z \frac{(z^2-1)^2}{4z^2(az+1)(z+a)} = \ast =$$

$$= 2\pi\left(\mathrm{res}_0 \frac{(z^2-1)^2}{4z^2(az+1)(z+a)} + \mathrm{res}_{-1/a}\frac{\cdots}{\cdots}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{4a^2\cdot\frac{1}{1+a^2}} + \frac{-(a^2-1)}{4a^2}\right) =$$

$$= \pi\frac{1}{a^2}$$

(Sei $|a|<1$)

$$\ast = 2\pi\left(\mathrm{res}_0 \frac{\cdots}{\cdots} + \mathrm{res}_{-a}\frac{\cdots}{\cdots}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{a^2+1}{a^2} + \frac{a^2-1}{a^2}\right) = \pi.$$

Für $a=\pm 1$ Integral divergiert.

2) $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,dx \overset{\text{grad}=-2}{=}$ [8

$$2\pi i \sum_{z\in\mathbb{H}} \operatorname{Res}_z \frac{z^2}{z^4+6z^2+13} = 2\pi i \sum_{z\in\mathbb{H}} \operatorname{Res}_z \frac{z^2}{(z^2+3+2i)(z^2+3-2i)}$$

[Sei $\sqrt{\cdot} : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$ - stetige Zweig der Wurzel mit $\sqrt{c} > 0$ für $c \in \mathbb{R}^+$

$$= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{-\sqrt{-3-2i}} \frac{\cdots}{\cdots} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{Res}_{\sqrt{-3+2i}} \frac{\cdots}{\cdots} \right) = 2\pi i \left(\frac{+1}{8i}\sqrt{-3-2i} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8i}\sqrt{-3+2i} \right) = \cdots$$

3) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n} = 2\pi i \sum_{z \in \mathbb{H}} \mathrm{Res}_z \frac{1}{(a+bz^2)^n} =$$

$$= 2\pi i \ \mathrm{Res}_{i\sqrt{\frac{+a}{b}}} \frac{1}{(a+bz^2)^n} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{(dz)^{n-1}} \frac{\left(z - i\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n}{(bz^2+a)^n}$$

$$= \frac{2\pi i}{b(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{(dz)^{n-1}} \left(z + i\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{-n} \Bigg|_{z = i\sqrt{\frac{a}{b}}} =$$

$$\cancel{\boxed{\frac{2\pi i}{b^n} \cdot n \cdot 2i\sqrt{\frac{a}{b}}}}$$

$$= \frac{2\pi (2n-1)!}{b^n((n-1)!)^2} \, 2^{2n-1} \frac{b^{n-\frac{1}{2}}}{a^{n-\frac{1}{2}}} =$$

$$= \pi \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{(2n-1)!}{((n-1)!)^2} \, 2^n \frac{1}{a^n}$$

4). $$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2}\,dx =$$

$$= \operatorname{Im}\left(\pi i \sum_{z \in \mathbb{H}} \operatorname{Res}_z \frac{z e^{iz}}{z^2+a^2}\right) =$$

$$\operatorname{Im}\left(\pi i \operatorname{Res}_{ia} \frac{z e^{iz}}{(z-ia)(z+ia)}\right) = \frac{\pi}{2} e^{-a}$$

5) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-\pi i x/2}}{x^2-2x+5}\,dx \underset{\boxed{y=-x}}{=} -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y e^{\pi i y/2}\,dy}{y^2+2y+5}$$

$$= -\sum_{z \in \mathbb{H}} \operatorname{Res}_z \frac{z e^{\pi i z/2}}{z^2+2z+5} =$$

$$= - \operatorname{Res}_{-1+2i} \frac{z e^{\pi i z/2}}{(z+1-2i)(z+1+2i)} =$$

$$= -\frac{1}{4}(1-2i)e^{-\pi}$$

6) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{16+x^2}\,dx = \ast$

Sei $\sqrt{\ }: \mathbb{C}\setminus\{-it \mid t\in\mathbb{R}^+\} \to \mathbb{C}$ - ~~stetige~~ Zweig der Wurzel mit $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{-1}=i$, Dann $\int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{x}}{16+x^2}\,dx \in i\mathbb{R}$

$$\ast = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{16+x^2}\,dx\right) = \mathrm{Re}\left(2\pi i \sum_{z\in\mathbb{H}} \mathrm{Res}_z \frac{\sqrt{z}}{16+z^2}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(2\pi i \;\mathrm{Res}_{4i} \frac{\sqrt{z}}{16+z^2}\right) = \mathrm{Re}\left(2\pi i\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i)\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$