(a) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-2)} = \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-2)} \overset{PBZ}{=} \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z-2}$

$$A(z+i)(z-2) + B(z-i)(z-2) + C(z-i)(z+i) = 1$$

$z = i$: $\quad A = \frac{1}{2i(i-2)} = \frac{-i}{2(i-2)}$

$z = -i$: $\quad B = \frac{1}{-2i(i-2)} = \frac{i}{2(i-2)}$

$z = 2$: $\quad C = \frac{1}{5}$

$|z| < 1$: $\quad \frac{1}{z-i} = \frac{1}{-i(1+iz)} = i \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{i}} = i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^{n+1} z^n$

$\quad \frac{1}{z+i} = \frac{1}{i(1-iz)} = -i \cdot \frac{1}{1-iz} = -i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)\, i^{n+1} z^n$

$|z| > 1$: $\quad \frac{1}{z-i} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} i^{-(n+1)} z^n$

$\quad \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{i}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{iz}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{iz}\right)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} (-i)^{-(n+1)} z$

$|z| < 2$: $\quad \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{2^{n+1}} z^n$

$|z| > 2$: $\quad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} 2^{-(n+1)} z^n$

$\Rightarrow$ $|z| < 1$:

$$f(z) = \frac{-i}{2(i-2)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^{n+1} z^n + \frac{i}{2(i-2)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)\, i^{n+1} z^n - \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{2^{n+1}} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-i)^n}{2(i-2)} + \frac{i^n}{2(i-2)} - \frac{1}{5 \cdot 2^{n+1}} \right] z^n$$

$1 < |z| < 2$:

$$f(z) = \frac{-i}{2(i-2)} \sum_{n=-1}^{-\infty} i^{-(n+1)} z^n + \frac{i}{2(i-2)} \sum_{n=-1}^{-\infty} (-i)^{-(n+1)} z^n + \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{2^{n+1}} z^n$$

$$= \sum_{n=-1}^{-\infty} \left[\frac{(-1) \cdot (-i)^n}{2(i-2)} + \frac{(-1)\, i^n}{2(i-2)} \right] z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{5 \cdot 2^{n+1}} z^n$$

$|z|>2$:

$$f(z)=\frac{-i}{2(i-2)}\sum_{n=-1}^{-\infty} i^{-(n+1)} z^n+\frac{i}{2(i-2)}\sum_{n=-1}^{-\infty}(-i)^{-(n+1)} z^n+\frac{1}{5}\sum_{n=-1}^{-\infty} 2^{-(n+1)} z$$

$$=\sum_{n=-1}^{-\infty}\left[\frac{(-1)\cdot(-i)^n}{2(i-2)}+\frac{(-1)\cdot i^n}{2(i-2)}+\frac{1}{5\cdot 2^{n+1}}\right] z^n$$

(b) $f(z)=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{(z+i)(z-2)}=:\frac{f_1(z)}{z-i}$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_i f = f_1(i)=\frac{-i}{2(i-2)}=A$$

$f(z)=\frac{1}{z+i}\cdot\frac{1}{(z-i)(z-2)}=:\frac{f_2(z)}{z+i}$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{-i} f = f_2(-i)=\frac{i}{2(i-2)}=B$$

$f(z)=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{z^2+1}=:\frac{f_3(z)}{z-2}$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_2 f = f_3(2)=\frac{1}{5}=C$$

(a) $f(z) = \frac{1}{(z+3)(z^2+4)} = \frac{1}{z+3} \cdot \frac{1}{z+2i} \cdot \frac{1}{z-2i}$

Nst: keine, Pole: $z_1 = -3$, $z_2 = -2i$, $z_3 = 2i$ (Ordnung jew. 1)

(b) $f(z) = \sin z - z$ Nst. $z_1 = 0$

$\sin z - z = \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - + \ldots\right) - z = z^3 \cdot \left(-\frac{1}{6} + \frac{z^2}{120} - + \ldots\right)$

$\rightarrow$ Ordnung 3

(c) $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z} = \sin w - w$, $w = \frac{1}{z}$ Subst.

$\sin w - w = w^3\left(-\frac{1}{6} + \frac{w^2}{120} - + \ldots\right)$

$= \frac{1}{z^3}\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{120 z^2} - + \ldots\right) = -\frac{1}{6z^3} + \frac{1}{120z^5} - + \ldots$

$\rightarrow$ wes. Sing. in $z_1 = 0$.

(d) $f(z) = \frac{1}{\sin z - z} = \frac{1}{z^3 \cdot \left(-\frac{1}{6} + \frac{z^2}{120} - + \ldots\right)} = \frac{1}{z^3} \cdot \left(-6 - \frac{3}{10} z^2 - \ldots\right)$

$\rightarrow$ Pol $z_1 = 0$, Ordnung 3

(e) $f(z) = \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots\right) - 1} = \frac{1}{z \cdot \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \ldots\right)}$

$= \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} + \ldots\right)$

$\rightarrow$ Pol $z_1 = 0$, Ordnung 1

(f) $f(z) = \frac{\sin z}{\cos z - 1}$

Betr. $z_1 = 0$: $\frac{\sin z}{\cos z - 1} = \frac{z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - + \ldots}{\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - + \ldots\right) - 1} = \frac{z\left(1 - \frac{z^2}{6} + - \ldots\right)}{z^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{z^2}{24} - + \ldots\right)}$

$= \frac{1}{z}\left(1 - \frac{z^2}{6} + - \ldots\right)\left(-2 - \frac{z^2}{6} - \ldots\right)$ Pol 1. Ordnung

Betr. $z_2 = \pi$: Subst. $w = z - \pi$

$\frac{\sin z}{\cos z - 1} = \frac{-\sin w}{-\cos w - 1} = \frac{-w\left(1 - \frac{w^2}{6} + - \ldots\right)}{\left(-1 + \frac{w^2}{2} - + \ldots\right) - 1} = \frac{w\left(-1 + \frac{w^2}{6} - + \ldots\right)}{-2 + \frac{w^2}{2} - + \ldots}$

$= w\left(-1 + \frac{w^2}{6} - + \ldots\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{w^2}{8} - \ldots\right)$ Nst 1. Ord.

$\rightarrow$ $2k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sind Pole 1. Ordnung

$(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sind Nst. 1. Ordnung

$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{z+1}$

Betr. $z_1 = k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$:

$$\frac{\sin(\pi z)}{z+1} = \left(\pi z - \frac{\pi^3}{6} z^3 + \frac{\pi^5}{120} z^5 - + \dots\right) \cdot \frac{1}{1+z}$$

$$= z \cdot \left(\pi - \frac{\pi^3}{6} z^2 + - \dots\right) \cdot \left(1 - z + z^2 - + \dots\right)$$ Nst. 1. Ordn

Betr. $z_2 = -1$: Subst. $w = z+1$

$$\frac{\sin(\pi z)}{z+1} = \frac{-\sin(\pi w)}{w} = \left(\pi - \frac{\pi^3}{6} w^2 + - \dots\right)$$ $\rightarrow$ hebbare Sing

$\rightarrow$ $\mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ Nst. jew. 1. Ordnung

$f(z) = e^z - 1 - z$ Nst. $z_1 = 0$

$$e^z - 1 - z = \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots\right) - 1 - z = z^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{6} + \dots\right)$$

$\rightarrow$ Ordnung 2

3. geg. $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ nicht-konstant

z.z. $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ ist dicht

Beweis indirekt:

Ang. $f(\mathbb{C})$ ist nicht dicht in $\mathbb{C}$

→ es ex. $w_0 \in \mathbb{C}$, $w_0 \notin \overline{f(\mathbb{C})}$

→ es ex. $\varepsilon > 0$ s.d. $B_\varepsilon(w_0) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$

→ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|f(z) - w_0| \geq \varepsilon$

Betr. die Fkt. $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto \frac{1}{f(z)-w_0}$

g ist wohldefiniert, holomorph und beschränkt mit $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

→ g ist konstant nach Satz von Liouville

→ f ist konstant, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Folglich muss $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ sein.

$\square$

4. geg. $U \subset \mathbb{C}$ offen, $a, b \in \mathbb{C} \setminus U$ in derselben Zshgskomp

$g: U \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$ O.B.d.A. $a \neq b$

Zeigen zuerst: Auf $g(U)$ ist ein Zweig des Logarithmus definiert

- Die Abb. $\hat{g}: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$, ist bijektiv.

  (Umkehrabb: $\frac{z-a}{z-b} = w \Rightarrow w(z-b) = z-a \Rightarrow z(w-1) = b-a \Rightarrow z = \frac{b-a}{w-1}$

- $a, b \in \mathbb{C} \setminus U$ in ders Zshgskomp $\to$ es ex. Pfad
  $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C} \setminus U$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$

- $\hat{g}(\gamma(t))$ ist Pfad in $\hat{\mathbb{C}} \setminus g(U)$
  mit $\hat{g}(\gamma(0)) = \hat{g}(a) = \frac{a-a}{a-b} = 0$ und $\hat{g}(\gamma(1)) = \hat{g}(b) = \frac{b-a}{b-b} = \infty$

- $g(U) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\hat{g}(\gamma(t)), t \in [0,1]\}$
  $\to$ In $g(U)$ ex. keine geschl. Wege um 0
  $\to$ Auf $g(U)$ ist ein Zweig des log definiert.

(a) $g(z) = \frac{z-a}{z-b} = 1 - \frac{a-b}{z-b} \to g'(z) = \frac{a-b}{(z-b)^2}$

$\frac{g'}{g}(z) = \frac{a-b}{(z-a)(z-b)}$, also $\frac{g'}{g} \in \mathcal{O}(U)$.

$f(z) := \log g(z)$ (wohldef., s.o.)

$\to f'(z) = \frac{1}{g(z)} g'(z)$, also f Stammfkt zu $\frac{g'}{g}$

(b) Zweige des log sind holomorph $\to f \in \mathcal{O}(U)$

$e^{f(z)} = e^{\log g(z)} = g(z) = \frac{z-a}{z-b}$

$\square$